COMPLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE MODERNE

A L'USAGE DES

ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

PAR

Charles MICHEL

DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1926

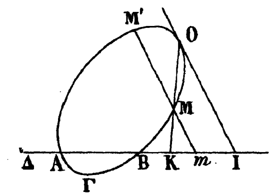
COMPLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE MODERNE

CHAPITRE I

LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES

1. Soit une conique Γ proprement dite. A, B, C, D étant quatre points fixes de la conique, donnés dans cet ordre, le rapport anharmonique (MA, MB, MC, MD) ou M(ABCD) des quatre droites qui joignent les points A, B, C, D à un point M de cette conique a, d'après un théorème dû à Chasles (¹), une valeur indépendante de la position de M. Cette valeur est dite *rapport anharmonique des points* A, B, C, D *sur la conique* : elle se représente par la notation (ABCD), employée aussi pour désigner le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D, donnés dans cet ordre, sur une droite.

2. Soient une conique proprement dite Γ et une droite Δ rencontrant Γ en deux points A et B, que nous supposerons d'abord distincts. O étant un point fixe de Γ autre que A et B, menons la tangente à Γ en O, rencontrant Δ en I. D'une manière générale, M étant un point de Γ et *m* étant un point de Δ, nous poserons



$$R = (\mathrm{ABMO}),$$
$$r = (\mathrm{AB}m\mathrm{I}).$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

(¹) Ce théorème est le suivant : *Les droites qui joignent deux points fixes d'une conique proprement dite à un point variable de cette conique sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques.*

Pour que deux points M *et* M′ *de* Γ *et un point* m *de* Δ *soient en ligne droite, il faut et il suffit que l'on ait*

$$RR' = r.$$

1° La condition énoncée est nécessaire. Supposons en effet que les points M, M′ et m soient en ligne droite. Menons la droite OM, qui rencontre Δ en K. On a

$$R = (ABMO) = O(ABMO) = (ABKI)$$

et

$$R' = (ABM'O) = M(ABM'O) = (ABmK).$$

Si, dans une représentation paramétrique linéaire de la droite Δ, a, b, k, μ et ω désignent respectivement les paramètres des points A, B, K, m et I, on a

$$R = (ABKI) = \frac{k-a}{k-b} : \frac{\omega-a}{\omega-b},$$

$$R' = (ABmK) = \frac{\mu-a}{\mu-b} : \frac{k-a}{k-b},$$

et par suite

$$RR' = \left(\frac{k-a}{k-b} : \frac{\omega-a}{\omega-b}\right) \cdot \left(\frac{\mu-a}{\mu-b} : \frac{k-a}{k-b}\right)$$

$$= \frac{\mu-a}{\mu-b} : \frac{\omega-a}{\omega-b} = (ab\mu\omega) = (ABmI) = r.$$

2° La condition énoncée est suffisante. Supposons en effet que M, M′ et m soient tels que l'on ait

$$RR' = r.$$

Menons la droite MM′ (qui sera la tangente en M si M′ est confondu avec M); soit m_1 son point d'intersection avec Δ. D'après la proposition directe, on a

$$RR' = r_1;$$

on en déduit que l'on a $r = r_1$, c'est-à-dire

$$(ABmI) = (ABm_1I),$$

ce qui exige que m_1 coïncide avec m. La réciproque est donc établie.

3. Applications. — 1° Supposons que la droite MM′ varie en passant par un point fixe m de Δ. Alors RR′ est constant. Soient

K et K′ les points d'intersection de Δ avec OM et OM′. On a

$$R = (ABKI), \quad R' = (ABK'I).$$

Si k et k' sont les paramètres de K et de K′ dans la représentation paramétrique linéaire précédemment considérée de la droite Δ, on a donc

$$\left(\frac{k-a}{k-b} : \frac{\omega - a}{\omega - b}\right) \cdot \left(\frac{k'-a}{k'-b} : \frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = \text{const.}$$

et par suite
$$\frac{k-a}{k-b} \cdot \frac{k'-a}{k'-b} = \text{const.}$$

Si l'on fait un changement de représentation paramétrique de Δ en posant

$$\frac{k-a}{k-b} = \theta, \qquad \frac{k'-a}{k'-b} = \theta',$$

la relation précédente devient

$$\theta\theta' = \text{const.}$$

Elle exprime que les points K et K′ se correspondent en involution sur Δ et par suite que les points M et M′ se correspondent en involution sur la conique. C'est le *théorème de Frégier*.

2° Pour que la tangente en M à Γ passe par le point m de Δ, il faut et il suffit que l'on ait

$$R^2 = r,$$

d'où l'on tire
$$R = \pm\sqrt{r}.$$

On voit ainsi que du point m on peut mener deux tangentes à Γ.

Soient M_1 et M_2 les deux points de contact et m' le point d'intersection de la droite M_1M_2 avec Δ. On a

$$(ABM_1O) \cdot (ABM_2O) = -r = -(ABmI).$$

Mais, d'autre part, on a

$$(ABM_1O) \cdot (ABM_2O) = (ABm'I).$$

Par suite, on a

$$(ABm'I) = -(ABmI),$$

ce qui exprime que m' est conjugué harmonique de m par rapport à

A et B. C'est la propriété qui conduit à la définition de la *polaire d'un point par rapport à une conique.*

4. On a le théorème suivant :

Pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 *de* Γ, *distincts ou confondus, et deux points* m *et* m' *de* Δ, *distincts ou confondus, soient situés sur une même conique, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_1R_2R_3R_4 = rr'.$$

1° La condition énoncée est nécessaire. Supposons en effet qu'il existe une conique Γ' passant par les six points M_1, M_2, M_3, M_4, m et m'. Le faisceau linéaire ponctuel de coniques qui contient la conique Γ et la conique Γ' contient au moins une conique réduite à deux droites, l'une rencontrant la conique Γ par exemple aux deux points M_1 et M_2, distincts ou confondus, et la droite Δ au point μ, l'autre rencontrant Γ aux deux points M_3 et M_4, distincts ou confondus, et Δ au point μ'. Si l'on pose

$$\rho = (AB\mu I), \qquad \rho' = (AB\mu' I),$$

on a

$$R_1R_2 = \rho, \qquad R_3R_4 = \rho'$$

et par suite

$$R_1R_2R_3R_4 = \rho\rho'.$$

Par application du théorème de Desargues (¹), les trois couples de points (A, B), (μ, μ') et (m, m') appartiennent à une même involution. Il s'ensuit que l'on a

$$(AB\mu m) = (BA\mu' m').$$

Si, dans une représentation paramétrique linéaire de Δ, a, b, θ, θ', t, t' désignent les paramètres des points A, B, μ, μ', m, m' respectivement, et si ω désigne le paramètre du point I, l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{\theta - a}{\theta - b} : \frac{t - a}{t - b} = \frac{\theta' - b}{\theta' - a} : \frac{t' - b}{t' - a},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\theta - a}{\theta - b} \cdot \frac{\theta' - a}{\theta' - b} = \frac{t - a}{t - b} \cdot \frac{t' - a}{t' - b},$$

(¹) Ce théorème s'énonce ainsi : *Les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel sont rencontrées par une droite en des couples de points qui appartiennent à une même involution.*

c'est-à-dire encore

$$\frac{\dfrac{\theta-a}{\theta-b}}{\dfrac{\omega-a}{\omega-b}}\cdot\frac{\dfrac{\theta'-a}{\theta'-b}}{\dfrac{\omega-a}{\omega-b}}=\frac{\dfrac{t-a}{t-b}}{\dfrac{\omega-a}{\omega-b}}\cdot\frac{\dfrac{t'-a}{t'-b}}{\dfrac{\omega-a}{\omega-b}},$$

c'est-à-dire enfin $\rho\rho' = rr'.$

On a donc bien $R_1R_2R_3R_4 = rr'.$

2° La condition énoncée est suffisante. Supposons en effet que les six points M_1, M_2, M_3, M_4 et m, m' soient tels que l'on ait

$$R_1R_2R_3R_4 = rr'.$$

Il existe une infinité de coniques rencontrant la conique Γ aux points M_1, M_2, M_3, M_4, distincts ou confondus. Ces coniques forment un faisceau linéaire ponctuel, et, parmi elles, il en existe une et une seule qui passe par m. Si m'_1 est le second point d'intersection de cette conique avec Δ_1, on a, d'après la proposition directe,

$$R_1R_2R_3R_4 = rr'_1;$$

on en déduit que l'on a $r' = r'_1$, c'est-à-dire

$$(ABm'I) = (ABm'_1I),$$

ce qui exige que m'_1 coïncide avec m'. La réciproque est donc établie.

5. **Applications.** — 1° Fixons les points m et m' d'intersection de la conique variable Γ' avec Δ et exprimons que Γ' est surosculatrice à Γ. Les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont alors confondus en un seul point M, et l'on a

$$R^4 = rr',$$

équation du quatrième degré en R. Donc, *il existe quatre coniques surosculatrices à Γ qui passent par deux points donnés sur une droite Δ rencontrant Γ en deux points distincts.*

L'équation précédente se décompose en les deux suivantes:

$$R^2 = +\sqrt{rr'}, \qquad R^2 = -\sqrt{rr'}.$$

Les deux points M' et M'_1 dont les R sont racines de la première équation sont sur la polaire du point ν' de la droite Δ tel que l'on ait

$$(AB\nu'I) = +\sqrt{rr'},$$

et les deux points M'' et M''_1 dont les R sont racines de la seconde équation sont sur la polaire du point ν'' de Δ tel que l'on ait

$$(AB\nu''I) = -\sqrt{rr'}.$$

Ces deux points ν' et ν'' sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, et ils sont aussi conjugués harmoniques par rapport aux points m et m'.

En particulier, supposons que la conique Γ soit une conique à centre et que les points m et m' soient les points cycliques. Les quatre coniques Γ' précédentes sont alors des cercles. Les points ν' et ν'' sont les points à l'infini qui correspondent aux directions principales de Γ ; leurs polaires par rapport à Γ sont les axes de Γ. *Il existe donc quatre cercles surosculateurs à Γ, et les points de contact avec Γ sont les sommets de Γ.*

2° Fixons les points m et m' d'intersection de la conique variable Γ' avec Δ, puis exprimons que Γ' passe par un point M_1 de Γ et est osculatrice à Γ en un point M autre que M_1. Les trois points M_2, M_3, M_4 sont alors confondus en un seul point M, et l'on a

$$R^3 = \frac{rr'}{R_1},$$

équation du troisième degré en R. Donc, *il existe trois coniques passant par un point donné de Γ, osculatrices en un autre point à Γ, et passant par deux points donnés sur une droite Δ qui rencontre Γ en deux points distincts.*

Si R', R'', R''' sont les racines de l'équation en R, on a

$$R'R''R''' = \frac{rr'}{R_1},$$

c'est-à-dire

$$R_1R'R''R''' = rr',$$

ce qui exprime que les trois points de contact avec Γ des coniques Γ' précédentes sont sur une même conique avec les points M_1, m et m'.

En particulier, supposons que la conique Γ soit une conique à centre et que les points m et m' soient les points cycliques. Les trois coniques Γ' précédentes sont alors des cercles. On voit ainsi que *par un point d'une conique à centre il passe trois cercles osculateurs à cette conique en des points autres que le point donné et que les trois points de contact sont situés sur un cercle qui passe par le point donné.*

6. Voici des formes particulières de la relation établie au § 4

entre les points d'intersection d'une conique variable avec une conique fixe et avec une droite fixe, lorsque cette conique et cette droite se coupent en deux points distincts.

1° Supposons que A et B soient les points cycliques. Alors, la conique Γ est un cercle et la droite Δ est la droite à l'infini. Si V est l'angle, défini à un multiple de π près, de la tangente en O à Γ avec la droite qui joint le point O au point M de Γ, on a, d'après un théorème dû à Laguerre,

$$R = e^{2iV}.$$

De même, v étant l'angle de la tangente en O à Γ avec la droite qui joint le point O au point m de la droite Δ, on a

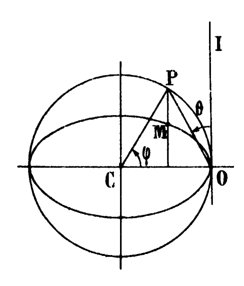
$$r = e^{2iv}.$$

La relation considérée devient alors

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = v + v',$$

à un multiple de π près.

2° Supposons que Γ soit une ellipse et que Δ soit la droite à l'infini. Les points A et B sont alors imaginaires conjugués. Prenons sur l'ellipse comme point O une extrémité du grand axe et par suite comme point I le point à l'infini du petit axe. Si M est un point réel de l'ellipse, R est le quotient de deux imaginaires conjuguées, c'est une imaginaire de module 1, qui peut être mise sous la forme $e^{i\varphi}$, φ étant réel et défini à un multiple de 2π près. Montrons que φ est égal à l'anomalie excentrique du point M. Soit en effet P le point du cercle principal de l'ellipse qui est situé sur la perpendiculaire au grand axe menée par M et qui est du même côté que M par rapport au grand axe. Dans la transformation de P en M, le point O se transforme en lui-même, et les points cycliques se transforment en les points A et B. Le rapport anharmonique R des points A, B, M, O sur l'ellipse est égal au rapport anharmonique formé sur le cercle par les points cycliques, le point P et le point O. Si θ est l'angle



de la tangente en O avec la droite OP, R est égal à $e^{2i\theta}$; par suite, on a

$$\varphi = 2\theta,$$

à un multiple de 2π près. On voit alors bien facilement que si C est le centre de l'ellipse, φ est, à un multiple de 2π près, l'angle de la demi-droite CO avec la demi-droite CP. On reconnaît la définition ordinaire de l'anomalie excentrique d'un point d'une ellipse.

Cela posé, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 d'une ellipse, d'anomalies excentriques φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, soient sur un même cercle. Comme un cercle variable rencontre la droite à l'infini en deux points fixes, le produit $e^{i\varphi_1}.e^{i\varphi_2}.e^{i\varphi_3}.e^{i\varphi_4}$ a une valeur constante, et il en est de même de la somme $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, à un multiple de 2π près. En particulier, considérons le cercle principal, qui touche l'ellipse aux deux points d'anomalies excentriques o et π; pour ce cercle, la somme des φ relatifs aux points de rencontre avec l'ellipse est égale à o, à un multiple de 2π près. Donc, lorsque le cercle est quelconque, on a la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

à un multiple de 2π près; c'est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

3° Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 d'une ellipse, d'anomalies φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, soient sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse. Un point de rencontre d'une telle hyperbole équilatère avec la droite à l'infini Δ est justement le point I à l'infini de la tangente en O à l'ellipse Γ; pour ce point, r est égal à 1. Pour le point à l'infini dans la direction du grand axe de l'ellipse, qui est conjugué harmonique du point I par rapport aux points à l'infini A et B de l'ellipse, r est égal à -1. On a par suite la relation

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\varphi_3} \cdot e^{i\varphi_4} = -1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi,$$

à un multiple de 2π près; c'est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Considérons une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse; soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les anomalies des quatre points de rencontre de cette hyperbole avec l'ellipse. Le

cercle qui passe par les trois points d'anomalies φ_1, φ_2, φ_3 rencontre l'ellipse en un quatrième point d'anomalie φ'_4. D'après ce qui précède, on a à la fois

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi'_4 = 0,$$

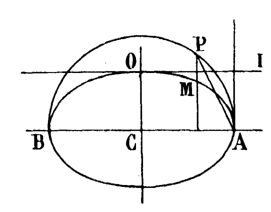
à un multiple de 2π près. Donc on a

$$\varphi_4 = \pi + \varphi'_4,$$

à un multiple de 2π près. Les deux points d'anomalies φ_4 et φ sont donc diamétralement opposés sur l'ellipse.

Donc, *si l'on coupe une ellipse par une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse, trois des points d'intersection et le point de l'ellipse diamétralement opposé au quatrième sont sur un même cercle.*

4° Cherchons aussi la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 d'une ellipse, d'anomalies φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, soient sur une conique passant par le centre C de l'ellipse et par le point à l'infini dans la direction du grand axe. Soient A et B les extrémités du grand axe, A étant d'anomalie 0, B, d'anomalie π. Si P est le point du cercle principal de l'ellipse qui est situé sur la perpendiculaire au grand axe menée par le point M de l'ellipse, d'anomalie φ, et qui est du même côté que M par rapport au grand axe, nous avons vu que l'angle de la tangente en A avec la droite AP est égal à $\frac{\varphi}{2}$, à un multiple de π près. Il en résulte que, si O est le point de l'ellipse qui a pour anomalie $\frac{\pi}{2}$, lequel point est une extrémité du petit axe, le rapport anharmonique R des quatre points A, B, M, O est égal à $\left(0, \infty, \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, 1\right)$, c'est-à-dire à $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.



Le point I est à l'infini. Le rapport anharmonique (ABHI) est égal à 1, et le rapport anharmonique (ABCI) est égal à -1. La condition cherchée est donc

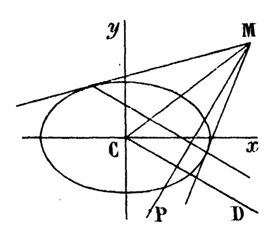
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_4}{2} = -1.$$

Posons, d'une manière générale, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$. La relation devient

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1.$$

5° Voici une application de ce qui précède aux normales à l'ellipse.

Cherchons d'abord le lieu d'un point M tel que la polaire de ce point par rapport à l'ellipse soit perpendiculaire à la droite qui joint le point M à un point donné P. Menons pour cela par le centre C de l'ellipse la parallèle D à la polaire de M. Comme l'on sait, les deux droites CM et D sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ; elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux asymptotes de l'ellipse, et par suite elles se correspondent involutivement. D'autre part, les deux droites D et PM, qui sont rectangulaires, sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, de sommets C et P. Il s'ensuit que les deux droites MC et MP se correspondent homographiquement, et que le lieu du point M est une conique passant par les points C et P (1). Il est facile de reconnaître que cette conique passe par les points à l'infini des axes de l'ellipse ; c'est donc une hyperbole équilatère H dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse ; on la désigne sous le nom d'*hyperbole d'Apollonius relative au point* P.



La polaire d'un point de l'ellipse étant la tangente en ce point, on voit que pour qu'un point de l'ellipse soit situé sur l'hyperbole H, il faut et il suffit que la normale en ce point à l'ellipse passe par P. L'hyperbole H rencontrant l'ellipse en quatre points, on a le théorème suivant :

Par un point P *il passe quatre normales à l'ellipse* Γ ; *les pieds de ces quatre normales sont situés sur une hyperbole* H *passant par* P, *par le centre de l'ellipse et par les points à l'infini des axes de l'ellipse.*

Cela posé, soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les anomalies des pieds M_1, M_2, M_3,

---

(1) Chasles a démontré le théorème suivant : *Le lieu du point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets distincts* O *et* O′ *est une conique passant par les points* O *et* O′.

M_4 des quatre normales menées de P à l'ellipse Γ. Puisque ces points sont situés sur une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse, on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi,$$

à $2k\pi$ près, k étant entier, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2} = \frac{\pi}{2},$$

à $k\pi$ près; autrement dit, $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2}\right)$ est infini. En posant, d'une manière générale, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, on a donc

$$1 - \Sigma t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3 t_4 = 0.$$

D'autre part, puisque les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont situés sur une conique passant par le centre de l'ellipse et par le point à l'infini du grand axe de l'ellipse, on a

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1.$$

Grâce à cette seconde relation, la première peut s'écrire

$$\Sigma t_1 t_2 = 0.$$

On obtient ainsi deux conditions nécessaires et suffisantes pour que les normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point.

L'équation aux t des pieds des normales menées d'un point à une ellipse est de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct - A = 0.$$

D'ailleurs, si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont les anomalies des quatre points de rencontre de l'ellipse avec un cercle, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2}\right) = 0,$$

et par suite $$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3.$$

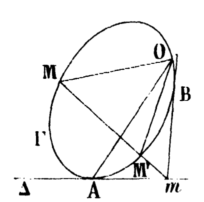
L'équation aux t des points de rencontre d'une ellipse avec un cercle est de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0.$$

De ce qui précède résulte le théorème suivant, dû à Joachimsthal :

Les pieds de trois des normales qu'on peut mener d'un point à une ellipse et le symétrique par rapport au centre de l'ellipse du pied de la quatrième normale sont situés sur un même cercle.

7. Dans ce qui précède, nous avons supposé que la droite Δ rencontrait la conique Γ en deux points distincts. Supposons maintenant que Δ soit tangente à Γ en un point A, et proposons-nous d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de Γ et deux points de Δ soient situés sur une même conique. A cet effet, nous ferons correspondre à chaque point M de Γ un paramètre λ qui représente linéairement la droite OM autour du point O.



Considérons d'abord une droite rencontrant Γ en M et M' et Δ en m. Si la droite varie de façon que m reste fixe, d'après le théorème de Frégier, les droites OM et OM' se correspondent en involution. L'un des rayons doubles de l'involution est la droite OA, l'autre rayon double est la droite qui joint le point O au point de contact B de la seconde tangente menée de m à Γ. Si λ et λ' sont les paramètres de M et de M', α le paramètre de A et μ celui de B, on a l'égalité

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{\lambda' - \alpha} = \frac{2}{\mu - \alpha}.$$

Cela posé, considérons une conique quelconque Γ' rencontrant Γ aux quatre points, distincts ou confondus, M_1, M_2, M_3, M_4 et la droite Δ aux points, distincts ou confondus, m et m'. Soient μ et μ' les paramètres des points de contact B et B' des secondes tangentes menées de m et de m' à la conique Γ. Si m et m' varient sur Δ dans une involution ayant A pour point double, le point de rencontre des tangentes en B et B' à Γ, en vertu du théorème corrélatif du théorème de Frégier, décrit une droite, et la droite BB' passe par un point fixe, pôle de cette droite par rapport à la conique Γ. Le couple des points B et B' varie donc en involution sur Γ ; d'ailleurs, A est un point double de l'involution ; par suite, la somme

$$\frac{1}{\mu - \alpha} + \frac{1}{\mu' - \alpha}$$

est constante.

Le faisceau linéaire ponctuel de coniques qui contient Γ et Γ′ contient au moins une conique réduite à deux droites, l'une rencontrant Γ par exemple aux deux points M_1 et M_2 et la droite Δ au point m_1, l'autre rencontrant Γ aux deux points M_3 et M_4 et la droite Δ au point m'_1. Soient μ_1 et μ'_1 les paramètres des points de contact B_1 et B'_1 des secondes tangentes menées de m_1 et de m'_1 à Γ. On a

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}=\frac{2}{\mu_1-\alpha}, \qquad \frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu'_1-\alpha}$$

et par suite

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu_1-\alpha}+\frac{2}{\mu'_1-\alpha}.$$

Or, d'après le théorème de Desargues, les couples (m, m') et (m_1, m'_1) définissent sur Δ une involution dont un point double est A ; donc, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{1}{\mu_1-\alpha}+\frac{1}{\mu'_1-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\mu'-\alpha}.$$

On a finalement la condition nécessaire

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}+\frac{2}{\mu'-\alpha}.$$

Montrons que cette condition est suffisante. Supposons en effet que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de Γ et deux points m et m' de Δ soient tels que la relation précédente ait lieu. Il existe une infinité de coniques rencontrant Γ aux points, distincts ou confondus, M_1, M_2, M_3, M_4. Les coniques forment un faisceau linéaire ponctuel, et, parmi elles, il en existe une et une seule qui passe par m. Si m'' est le second point d'intersection de cette conique avec Δ, en désignant par μ'' le paramètre du point B'' de contact de la seconde tangente menée de m'' à Γ, on a, d'après la proposition directe,

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}+\frac{2}{\mu''-\alpha},$$

d'où

$$\frac{2}{\mu''-\alpha}=\frac{2}{\mu'-\alpha},$$

c'est-à-dire $\mu'' = \mu'$, ce qui exige que m'' coïncide avec m'. La réciproque est donc établie.

Pour interpréter la condition trouvée, nous introduirons une notion nouvelle. D'une manière générale, nous appellerons *pôle harmonique* d'un point, de paramètre α, sur une courbe unicursale, par rapport à un système de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ situés sur cette courbe, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, le point P de cette courbe dont le paramètre μ est défini par l'égalité

$$\frac{n}{\mu - \alpha} = \frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n - \alpha}.$$

Il est nécessaire de démontrer que la définition est indépendante de la représentation paramétrique, supposée propre, de la courbe unicursale, c'est-à-dire que la relation précédente subsiste si l'on effectue sur les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, μ et α une même transformation homographique. Or, comme on sait, une transformation homographique quelconque est le produit de transformations prises parmi les transformations homographiques, dites élémentaires, $\lambda' = \lambda + h$, $\lambda' = h\lambda$, $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. On voit immédiatement que la relation considérée ne change pas de forme quand on effectue chacune des deux premières transformations homographiques élémentaires. Il reste à voir que c'est encore vrai quand on effectue la transformation $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. Or, en posant

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda'_i}, \qquad \mu = \frac{1}{\mu'}, \qquad \alpha = \frac{1}{\alpha'},$$

on a

$$\frac{n}{\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\alpha'}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda'_1} - \frac{1}{\alpha'}} + \ldots + \frac{1}{\frac{1}{\lambda'_n} - \frac{1}{\alpha'}},$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$\frac{n\mu'}{\mu' - \alpha'} = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_1 - \alpha'} + \ldots + \frac{\lambda'_n}{\lambda'_n - \alpha'}.$$

Mais on a

$$\frac{\mu'}{\mu' - \alpha'} = \frac{\alpha'}{\mu' - \alpha'} + 1, \qquad \frac{\lambda'_1}{\lambda'_1 - \alpha'} = \frac{\alpha'}{\lambda'_1 - \alpha'} + 1, \qquad \ldots\ldots$$

On voit bien ainsi que la relation se réduit à

$$\frac{n}{\mu' - \alpha'} = \frac{1}{\lambda'_1 - \alpha'} + \cdots + \frac{1}{\lambda'_n - \alpha'}.$$

Le raisonnement suppose que α et α' sont finis. Si α, par exemple, est infini, il convient de remplacer la relation qui définit le pôle harmonique par la relation

$$n\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

comme on le reconnaît en faisant, dans ce qui précède, $\alpha' = 0$.

En particulier, si le système des points M se réduit à deux points, le pôle harmonique de A par rapport aux deux points M est le conjugué harmonique de A par rapport à ces deux points.

La relation précédemment établie entre les points de rencontre de Γ et de Δ avec une conique variable conduit ainsi au théorème suivant :

Étant données une conique Γ et une droite Δ tangentes en A, pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de Γ et deux points m et m' de Δ soient situés sur une même conique, il faut et il suffit que le pôle harmonique de A par rapport au système des points M_1, M_2, M_3, M_4 soit conjugué harmonique de A par rapport aux points de contact avec Γ des secondes tangentes menées à Γ par les points m et m'.

Par dualité, appelons *polaire harmonique* d'une tangente à une courbe unicursale, de paramètre α, par rapport à un système de tangentes à cette courbe, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, la tangente à la courbe dont le paramètre μ est défini par l'égalité

$$\frac{n}{\mu - \alpha} = \frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n - \alpha}.$$

D'après cette définition, le point de contact de la polaire harmonique est le pôle harmonique du point de contact de la tangente de paramètre α par rapport au système des points de contact des tangentes de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Remarquons que la définition s'applique à l'ensemble des droites qui passent par un point. On a, en outre, dans ce cas, le théorème suivant, qui est immédiat:

Soient n droites concourantes D_1, D_2, ..., D_n, une droite Δ passant par leur point de concours, et la polaire harmonique Δ' de Δ par rapport aux droites D_1, D_2, ..., D_n. Si on coupe ces droites concourantes par une droite quelconque L ne passant pas par leur point commun,

le point d'intersection avec Δ a pour pôle harmonique par rapport aux points d'intersection avec $D_1, D_2, \ldots, D_n$ le point d'intersection avec Δ'.

Cela posé, on a, par dualité, le théorème suivant :

Étant donnés une conique Γ et un point A de cette conique, pour que quatre tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 à Γ et deux droites t et t' menées par A soient tangentes à une même conique, il faut et il suffit que le pôle harmonique de A par rapport aux points de contact de T_1, T_2, T_3, T_4 soit conjugué harmonique de A par rapport aux points autres que A d'intersection de Γ avec les droites t et t'.

8. Applications. — 1° Remarquons que le pôle harmonique du point à l'infini d'une droite par rapport à un système de points de cette droite est le centre des moyennes distances de ces points. Cela posé, supposons, dans le premier théorème général établi au paragraphe précédent, que les points m et m' soient les points cycliques ; la conique Γ est alors une parabole et la conique variable, un cercle. Le conjugué harmonique du point à l'infini de la parabole par rapport aux points de contact des tangentes isotropes est, par raison de symétrie, le sommet de cette parabole. Donc, on a le théorème suivant :

Pour que quatre points d'une parabole soient situés sur un même cercle, il faut et il suffit que leur centre des moyennes distances soit situé sur l'axe de la parabole.

2° Supposons, dans le second théorème général établi au paragraphe précédent, que Γ soit une parabole et que A soit son point de contact avec la droite à l'infini. On obtient alors l'énoncé suivant :

Le centre des moyennes distances des points de contact avec une parabole des tangentes communes à cette parabole et à une conique de centre C est sur la parallèle à l'axe de la parabole menée par le point C.

9. La relation entre les six points de rencontre d'une conique variable avec une conique fixe Γ et avec une droite fixe Δ est illusoire si la conique variable passe par un point commun à Γ et à Δ.

Nous nous bornerons au cas où la conique Γ et la droite Δ sont tangentes en un point A. Considérons une conique variable passant par A et y admettant une tangente fixe, autre que Δ. Elle ren-

contre Γ en trois points variables M_1, M_2, M_3 et Δ en un point variable m. Les quatre points M_1, M_2, M_3 et m sont liés par une relation que nous nous proposons d'établir.

Prenons d'abord une conique variable rencontrant Δ en un point m' infiniment voisin de A et en un autre point m, rencontrant Γ en un point M_4 infiniment voisin de A et en trois autres points M_1, M_2, M_3. Reprenant les notations antérieurement définies, nous avons l'égalité

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_4 - \alpha} = \frac{2}{\mu - \alpha} + \frac{2}{\mu' - \alpha}$$

Soit M' le point de rencontre autre que M_4 de la droite $m'M_4$ avec Γ ; si λ' est son paramètre, on a

$$\frac{1}{\lambda_4 - \alpha} + \frac{1}{\lambda' - \alpha} = \frac{2}{\mu' - \alpha}.$$

Par soustraction membre à membre des deux égalités précédentes, on obtient

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} - \frac{1}{\lambda' - \alpha} = \frac{2}{\mu - \alpha}.$$

A la limite, quand M_4 et m' sont confondus avec A, M' devient le point de rencontre, autre que A, de la tangente en A à la conique variable avec la conique Γ, et la relation précédente conserve un sens.

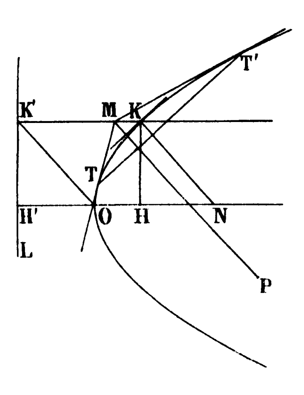
En particulier, supposons que la droite Δ soit à l'infini ; la conique Γ est alors une parabole. Coupons cette parabole par une hyperbole équilatère variable ayant comme asymptote l'axe de la parabole. M' est par suite le sommet de la parabole, et c'est aussi le point de contact de la tangente autre que la droite à l'infini menée de m à la parabole. Donc, $\lambda' = \mu$ et la relation devient

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} = \frac{3}{\mu - \alpha}.$$

Elle exprime que le pôle harmonique du point à l'infini de la parabole par rapport au système des trois points de rencontre à distance finie de la parabole avec l'hyperbole coïncide avec le som-

met de la parabole ; par suite, le centre de gravité du triangle ayant pour sommets ces trois points est sur l'axe de la parabole.

Voici l'application qu'on peut faire de ce résultat aux normales à la parabole. Cherchons d'abord le lieu d'un point M tel que la polaire de ce point par rapport à la parabole soit perpendiculaire à la droite qui joint le point M à un point donné P. Menons pour cela la parallèle à l'axe de la parabole qui passe par M ; elle rencontre la parabole en un point K, en lequel la tangente est parallèle à la polaire de M et par suite perpendiculaire à MP. Soient H la projection de K sur l'axe, N le point de rencontre avec l'axe de la normale en K. Comme on sait, HN est égal au paramètre de la parabole. Menons par le sommet O de la parabole la parallèle à MP et à KN, rencontrant la droite MK



en K' ; si H' est la projection de K' sur l'axe, les deux triangles K'H'O et KHN se déduisent l'un de l'autre par translation ; comme $\overrightarrow{HN}$ est équipollent à un vecteur fixe, il en est de même de $\overrightarrow{H'O}$, et ainsi le point H' est fixe, le lieu de K' est une droite L perpendiculaire à l'axe de la parabole. D'après cela, la droite OK' et la droite MK sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour sommets O et le point à l'infini sur l'axe de la parabole. Comme les droites OK' et PM se déduisent l'une de l'autre par translation, il y a correspondance homographique entre ces deux droites et par suite entre les deux droites PM et MK. Le lieu du point M est donc une conique passant par le point P et par le point à l'infini sur l'axe de la parabole. Ce dernier point s'obtient dans la génération du lieu en supposant que la droite PM devienne parallèle à l'axe de la parabole ; alors, K vient en O, la droite MK coïncide avec l'axe de la parabole, et ainsi, on voit que l'axe de la parabole est asymptote à la conique trouvée. D'autre part, il est facile de reconnaître que le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe de la parabole est un point du lieu ; le lieu est donc une hyperbole équilatère asymptote à l'axe de la parabole, dite *hyperbole d'Apollonius relative au point* P.

D'après cela, on a les théorèmes suivants :

1° *Pour que les normales à la parabole en trois points de la parabole soient concourantes, il faut et il suffit que le centre de gravité du triangle ayant pour sommets ces trois points soit sur l'axe de la parabole.*

2° *Pour que les normales à la parabole en trois points de cette parabole soient concourantes, il faut et il suffit que le cercle circonscrit au triangle qui a pour sommets ces trois points passe par le sommet de la parabole.*

CHAPITRE II

TRIANGLES CONJUGUÉS, TRIANGLES INSCRITS ET TRIANGLES CIRCONSCRITS AUX CONIQUES

1. On dit qu'un triangle est *conjugué* par rapport à une conique si la polaire de chacun de ses sommets coïncide avec le côté opposé et si, par le fait même, le pôle de chacun de ses côtés coïncide avec le sommet opposé. Deux quelconques des sommets sont conjugués par rapport à la conique, et il en est de même de deux quelconques des côtés.

Théorème. — *Les six sommets de deux triangles conjugués par rapport à une conique sont situés sur une même conique* (1).

Soient deux triangles ABC et A'B'C' conjugués par rapport à une conique Γ. Les coniques qui passent par les quatre points A, B, C, A' forment un faisceau linéaire ponctuel, et, d'après le théorème de Desargues, elles rencontrent la droite B'C' en des couples de points qui font partie d'une même involution. En particulier, la conique formée par les deux droites A'B et AC et la conique formée par les deux droites A'C et AB rencontrent B'C' en deux couples de points M, N et M', N' qui appartiennent à cette involution. Or, les points M et N sont conjugués par rapport à Γ, ainsi que les points M' et N'. Par suite, l'involution précédente a deux couples communs avec l'involution formée par les couples de points situés sur B'C' et conjugués par rapport à Γ ; elle coïncide donc avec cette involution et contient ainsi le couple des points B' et C' ; autrement dit, il existe une conique passant par A, B, C, A' et passant par B' et C'. Le théorème est démontré.

Remarquons qu'il peut arriver que la conique passant par les

(1) Ce théorème est dû à Poncelet.

six sommets des deux triangles soit formée de deux droites ; ces deux droites sont alors conjuguées par rapport à Γ

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, ou par transformation par polaires réciproques par rapport à la conique Γ, on obtient le théorème suivant :

Les six côtés de deux triangles conjugués par rapport à une conique sont tangents à une même conique.

Remarquons que la conique tangente aux six côtés des deux triangles peut être formée de deux points ; les deux points sont alors conjugués par rapport à Γ.

Théorème. — *Étant données deux coniques* Γ *et* Γ′, *s'il existe un triangle à la fois inscrit à* Γ′ *et conjugué par rapport à* Γ, *il en existe une infinité, de façon qu'on puisse prendre pour un des sommets d'un tel triangle un point arbitraire de* Γ′.

Soit en effet ABC le triangle à la fois inscrit à Γ′ et conjugué par rapport à Γ. A′ étant un point arbitrairement choisi sur Γ′, la polaire de A′ par rapport à Γ rencontre Γ′ en deux points B′ et C′, qui, d'après la démonstration même du théorème de Poncelet, sont conjugués par rapport à Γ. Le triangle A′B′C′ est à la fois inscrit à Γ′ et conjugué par rapport à Γ.

La conique Γ′ est alors dite *harmoniquement circonscrite à la conique* Γ.

Par dualité, *étant données deux coniques* Γ *et* Γ′, *s'il existe un triangle à la fois circonscrit à* Γ′ *et conjugué par rapport à* Γ, *il en existe une infinité, de façon qu'on puisse prendre pour un des côtés d'un tel triangle une tangente arbitraire à* Γ′.

La conique Γ′ est alors dite *harmoniquement inscrite à la conique* Γ.

2. Applications. — 1° Soit une hyperbole équilatère de centre O. Le triangle qui a pour sommets le point O et les points cycliques I et J est conjugué par rapport à l'hyperbole. ABC étant un triangle conjugué par rapport à l'hyperbole, les six points A, B, C, O, I, J sont situés sur une même conique. Autrement dit,

Le cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette hyperbole.

On a aussi les théorèmes suivants :

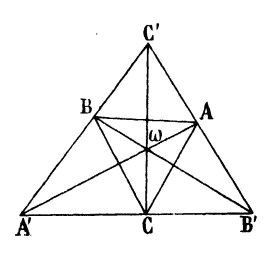
Si un cercle passe par le centre d'une hyperbole équilatère, il existe une infinité de triangles à la fois inscrits au cercle et conjugués par rapport à l'hyperbole.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères qui admettent un triangle donné comme triangle conjugué est le cercle circonscrit à ce triangle.

2° Soient une hyperbole équilatère H et un cercle C ayant son centre ω sur l'hyperbole. Le triangle qui a pour sommets le centre ω du cercle et les points à l'infini de l'hyperbole est à la fois inscrit à l'hyperbole et conjugué par rapport au cercle. Donc, *si une hyperbole équilatère passe par le centre d'un cercle, elle est harmoniquement circonscrite à ce cercle.*

Montrons que, réciproquement, *si une hyperbole équilatère est harmoniquement circonscrite à un cercle, elle passe par le centre du cercle.* En effet, un point à l'infini de l'hyperbole est un sommet d'un triangle à la fois inscrit à l'hyperbole et conjugué par rapport au cercle. Le côté du triangle opposé à ce sommet est perpendiculaire à la direction des droites qui passent par ce point à l'infini ; il passe donc par l'autre point à l'infini, qui est ainsi un second sommet du triangle. Le troisième sommet est nécessairement le centre du cercle ; le centre du cercle est donc situé sur l'hyperbole ; la réciproque est démontrée.

3° Étant donnés un triangle ABC et deux points ω, ω', il existe une conique et en général une seule passant par les points ω, ω' et admettant le triangle ABC comme triangle conjugué. En effet, il existe un quadrangle admettant le point ω pour un de ses sommets et tel que les points de rencontre de ses côtés opposés soient les points A, B, C. Ce quadrangle admet pour côtés les droites ωA, ωB, ωC, puis, respectivement opposées à ces droites, la droite B'C' conjuguée harmonique de ωA par rapport à AB et AC, la droite C'A' conjuguée harmonique de ωB par rapport à BC et BA, la droite A'B' conjuguée harmonique de ωC par rapport à CA et CB. Pour qu'une conique passe par ω et admette le triangle ABC comme triangle conjugué, il faut et il suffit qu'elle passe par les quatre points ω, A', B',



C'. On voit ainsi qu'il existe une conique et en général une seule passant par ω, ω' et admettant le triangle ABC comme triangle conjugué ; c'est la conique qui passe par les cinq points ω, ω', A', B', C'.

En particulier, en supposant que les points ω et ω' sont les points cycliques, on voit qu'il existe un cercle Γ et un seul admettant un triangle ABC comme triangle conjugué. La polaire d'un point par rapport à un cercle étant perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point, le centre du cercle Γ n'est autre que le point de concours H des hauteurs (orthocentre) du triangle ABC. Si α, β, γ sont les points de rencontre des côtés BC, CA, AB du triangle respectivement avec les hauteurs AH, BH, CH, on a

$$\overline{HA}\cdot\overline{H\alpha}=\overline{HB}\cdot\overline{H\beta}=\overline{HC}\cdot\overline{H\gamma}=\rho^2,$$

ρ étant le rayon du cercle Γ. En supposant le triangle ABC réel, pour que le cercle Γ soit réel, il faut et il suffit que le triangle soit obtusangle.

Soit alors une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC ; elle est harmoniquement circonscrite au cercle Γ ; elle passe donc par le centre de ce cercle. Autrement dit, *si une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe nécessairement par l'orthocentre de ce triangle.*

Réciproquement, soit une conique circonscrite à un triangle ABC et passant par le point H de concours des hauteurs ; montrons que c'est une hyperbole équilatère. En effet, cette conique est harmoniquement circonscrite au cercle Γ, de centre H, qui admet le triangle ABC comme triangle conjugué. Il existe un triangle inscrit à la conique ayant pour sommet le point H et conjugué par rapport au cercle Γ. Les deux autres sommets de ce triangle sont les points à l'infini de la conique ; ces points, étant conjugués par rapport à Γ, sont à l'infini dans deux directions rectangulaires ; la conique considérée est donc une hyperbole équilatère.

4° Soit une hyperbole équilatère de centre O. Le triangle qui a pour sommets le point O et les points cycliques I et J est conjugué par rapport à l'hyperbole. ABC étant un triangle conjugué par rapport à l'hyperbole, les trois côtés de ce triangle, les droites OI et OJ et la droite à l'infini sont six tangentes à une même conique. Autrement dit,

La conique qui admet comme foyer le centre d'une hyperbole équilatère et qui est inscrite à un triangle conjugué par rapport à cette hyperbole est une parabole.

5° Soit une parabole. Les points à l'infini dans deux directions rectangulaires variables se correspondent involutivement sur la droite à l'infini ; les points doubles de l'involution sont les points cycliques. Comme la droite à l'infini est tangente à la parabole, en vertu du théorème corrélatif du théorème de Frégier, le lieu du point de rencontre de deux tangentes rectangulaires variables à la parabole est une droite D qui passe par les points de contact des tangentes isotropes à la parabole ; cette droite est la polaire du foyer de la parabole par rapport à la parabole ; autrement dit, c'est la directrice de la parabole.

Cela posé, considérons les paraboles qui sont inscrites à un triangle ABC. Elles sont tangentes à quatre droites fixes, les côtés du triangle ABC et la droite à l'infini ; elles forment donc un faisceau linéaire tangentiel, et les couples de tangentes menées d'un point donné à ces paraboles font partie d'une même involution. Supposons que le point donné soit le point H de rencontre des hauteurs du triangle ABC. L'involution contient alors trois couples de droites rectangulaires, chacun de ces couples étant formé des droites qui joignent H à un sommet du triangle et au point à l'infini sur le côté opposé. Il s'ensuit que tous les couples de l'involution sont formés de droites rectangulaires ; autrement dit,

Si un triangle est circonscrit à une parabole, le point de rencontre des hauteurs du triangle est situé sur la directrice de la parabole.

Il en résulte que

Si une parabole est harmoniquement inscrite à un cercle, sa directrice passe par le centre du cercle.

Pour établir ce théorème, on peut encore raisonner comme il suit.

Soient une parabole et un triangle ABC qui lui est circonscrit. Considérons le cercle qui admet le triangle ABC comme triangle conjugué ; il a pour centre le point H de concours des hauteurs du triangle. La parabole étant harmoniquement inscrite au cercle, il existe un triangle circonscrit à la parabole et conjugué par rapport au cercle, dont un côté est la droite à l'infini, qui est une tangente à la parabole. Le sommet de ce triangle qui est opposé à la droite à l'infini coïncide avec H ; les deux côtés qui passent par H sont deux diamètres rectangulaires du cercle ; or, ce sont aussi les tangentes à la parabole qui passent par H. On voit ainsi que H est situé sur la directrice de la parabole.

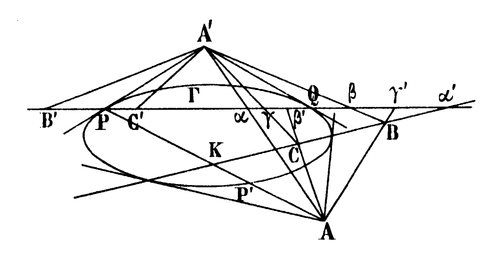
Montrons maintenant que, réciproquement,

Étant donnés une parabole et un cercle, si la directrice de la parabole passe par le centre du cercle, la parabole est harmoniquement inscrite au cercle.

En effet, les tangentes à la parabole qui passent par le centre du cercle sont rectangulaires ; elles forment donc avec la droite à l'infini un triangle qui est à la fois circonscrit à la parabole et conjugué par rapport au cercle, ce qui démontre le théorème.

3. Théorème. — *Étant donnés deux triangles inscrits à une conique, il existe une conique admettant ces deux triangles comme triangles conjugués.*

Soient en effet deux triangles ABC et A′B′C′ inscrits à une même conique Γ′. Les coniques qui passent par les quatre points A, B, C, A′, parmi lesquelles se trouve la conique Γ′, forment un faisceau linéaire ponctuel, et, d'après le théorème de Desargues, elles rencontrent la droite B′C′ en des couples de points qui font partie d'une même involution. Parmi ces couples de points se trouvent le couple des points B′ et C′, le couple des points d'intersection α et α' de B′C′ respectivement avec les droites A′A et BC, le couple des



points d'intersection β et β' de B′C′ respectivement avec les droites A′B et CA, le couple des points d'intersection γ et γ' de B′C′ respectivement avec les droites A′C et AB. S'il existe une conique admettant les deux triangles ABC et A′B′C′ comme triangles conjugués, chacun des couples de points (α, α'), (β, β'), (γ, γ') est formé de points conjugués par rapport à cette conique, qui doit donc passer par les points doubles P et Q de l'involution précédente et être tangente en P et Q aux droites A′P et A′Q. En outre, cette conique doit passer par le conjugué harmonique P′ du point P par rapport au point A et au point d'intersection K de la droite AP avec

la droite BC. Or, il existe effectivement une conique Γ qui est tangente en P et Q aux deux droites A'P et A'Q et qui passe par P'. Cette conique Γ admet le triangle A'B'C' comme triangle conjugué. Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que le triangle ABC est conjugué par rapport à Γ. Or, la polaire de α' par rapport à Γ passe par A' et par α, elle passe donc par A; par suite, la polaire de A par rapport à Γ passe par α'; comme elle passe aussi par K, c'est la droite BC. Ensuite, la polaire de β' par rapport à Γ est la droite $A'\beta$ qui passe par B; donc la polaire de B, qui passe par A, passe aussi par β' et coïncide ainsi avec AC; de même, la polaire de C est la droite AB. Le triangle ABC est bien conjugué par rapport à Γ.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on a le théorème suivant :

Étant donnés deux triangles circonscrits à une conique, il existe une conique admettant les deux triangles comme triangles conjugués.

Théorème. — *Les triangles inscrits à une conique Γ' et conjugués par rapport à une conique Γ sont circonscrits à une conique Γ'', polaire réciproque de Γ' par rapport à Γ.*

En effet, dans la transformation par polaires réciproques par rapport à Γ, les sommets d'un triangle conjugué par rapport à Γ se transforment en les côtés de ce triangle. Si donc un triangle conjugué par rapport à Γ est inscrit à une conique Γ', il est aussi circonscrit à une conique Γ'', polaire réciproque de Γ' par rapport à Γ.

Théorème corrélatif. — *Les triangles circonscrits à une conique Γ'' et conjugués par rapport à une conique Γ sont inscrits à une conique Γ', polaire réciproque de Γ'' par rapport à Γ.*

Il suffit d'appliquer le principe de dualité à la démonstration du théorème précédent.

4. Des théorèmes qui viennent d'être établis, il résulte les théorèmes suivants :

1° *Si deux triangles sont inscrits à une même conique, ils sont aussi circonscrits à une même conique.*

En effet, si deux triangles sont inscrits à une même conique, il existe une conique par rapport à laquelle ils sont conjugués; par

suite, d'après le théorème corrélatif du théorème de Poncelet, ils sont circonscrits à une même conique.

2° *Si deux triangles sont circonscrits à une même conique, ils sont aussi inscrits à une même conique.*

En effet, si deux triangles sont circonscrits à une même conique, il existe une conique par rapport à laquelle ils sont conjugués ; par suite, d'après le théorème de Poncelet, ils sont inscrits à une même conique.

Théorème. — *Étant données deux coniques Γ_1 et Γ_2, s'il existe un triangle à la fois inscrit à Γ_1 et circonscrit à Γ_2, il en existe une infinité, de façon qu'on puisse prendre pour un des sommets d'un tel triangle un point arbitraire de Γ_1 et de façon qu'on puisse prendre pour un des côtés d'un tel triangle une tangente arbitraire à Γ_2.*

En effet, soit ABC le triangle à la fois inscrit à Γ_1 et circonscrit à Γ_2. A' étant un point arbitrairement choisi sur Γ_1, menons de A' les tangentes à Γ_2 ; soient B' et C' les points d'intersection autres que A' de ces deux droites et de Γ_1. Les deux triangles ABC et A'B'C', étant inscrits à Γ_1, sont circonscrits à une même conique, laquelle coïncide avec la conique Γ_2, comme ayant cinq tangentes communes avec elle.

De même, soient B' et C' les points d'intersection avec Γ_1 d'une tangente à Γ_2 prise arbitrairement. De B' et de C' menons les tangentes à Γ_2 autres que B'C' ; soit A' le point de rencontre de ces deux droites. Les deux triangles ABC et A'B'C', étant circonscrits à Γ_2, sont inscrits à une même conique, laquelle coïncide avec Γ_1, comme ayant cinq points communs avec elle.

Théorème. — *Les triangles inscrits à une conique Γ' et circonscrits à une conique Γ'' sont conjugués par rapport à une conique Γ.*

Soient en effet deux triangles ABC et A'B'C' inscrits à Γ' et circonscrits à Γ''. Il existe une conique Γ qui admet ces deux triangles comme triangles conjugués. La polaire réciproque de Γ' par rapport à Γ est inscrite aux deux triangles considérés et coïncide par suite avec la conique Γ'', comme ayant six tangentes communes avec elle. Il s'ensuit que les triangles inscrits à Γ' et conjugués par rapport à Γ sont circonscrits à Γ'', d'où résulte immédiatement que les triangles inscrits à Γ' et circonscrits à Γ'' sont conjugués par rapport à Γ.

5. Application. — Soit une parabole. Le triangle qui a pour

sommets le foyer F de cette parabole et les deux points cycliques est circonscrit à la parabole. Il en résulte que les trois sommets d'un triangle circonscrit à la parabole, le point F et les points cycliques sont situés sur une même conique ; autrement dit,

Le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer de cette parabole,

ou encore

Le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

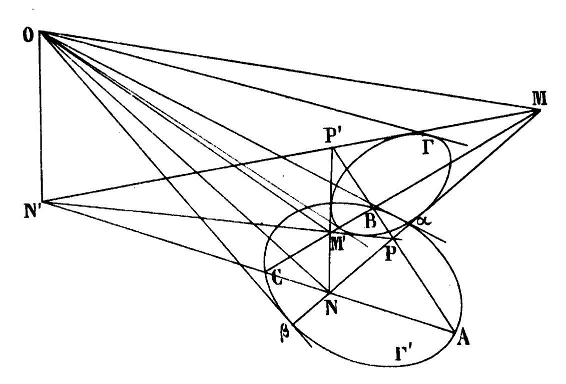
On a aussi l'énoncé suivant :

Si un cercle passe par le foyer d'une parabole, il existe une infinité de triangles inscrits au cercle et circonscrits à la parabole.

6. Théorème. — *Si une conique Γ′ est harmoniquement circonscrite à une conique Γ, la conique Γ est harmoniquement inscrite à la conique Γ′.*

En effet, soit ABC un triangle inscrit à Γ′ et conjugué par rapport à Γ.

Prenons une tangente quelconque à Γ, rencontrant Γ′ en α et β.



Il s'agit de montrer qu'il existe un triangle admettant cette droite comme côté, à la fois circonscrit à Γ et conjugué par rapport à Γ′. Cela revient à montrer que si O est le point de rencontre des

tangentes en α et β à Γ', les deux tangentes à Γ qui passent par O sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites $O\alpha$ et $O\beta$.

Or, la conique Γ qui est tangente à la droite $\alpha\beta$ est tangente à trois autres droites formant avec $\alpha\beta$ un quadrilatère complet qui admet comme diagonales les côtés du triangle ABC. Trois des sommets de ce quadrilatère complet sont les points d'intersection M, N, P de la droite $\alpha\beta$ respectivement avec les côtés BC, CA, AB du triangle ABC; soient M', N', P' les sommets du quadrilatère complet respectivement opposés à M, N, P. Les deux points M et M' sont conjugués harmoniques par rapport aux points B et C; ils sont donc conjugués par rapport à Γ'. Il s'ensuit que la droite OM' est la polaire de M par rapport à Γ' et qu'elle est ainsi conjuguée harmonique de OM par rapport aux deux droites $O\alpha$ et $O\beta$. De même, ON' est conjuguée harmonique de ON, OP' est conjuguée harmonique de OP par rapport aux droites $O\alpha$ et $O\beta$. Mais, en vertu du théorème de Desargues relatif aux faisceaux linéaires tangentiels de coniques, le couple des tangentes à Γ qui passent par O fait partie d'une involution qui contient les couples de droites (OM, OM'), (ON, ON'), (OP, OP'). Ce qui précède montre que $O\alpha$ et $O\beta$ sont les droites doubles de cette involution, et ainsi il est bien établi que les deux tangentes à Γ qui passent par O sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites $O\alpha$ et $O\beta$.

Théorème corrélatif. *Si une conique Γ est harmoniquement inscrite à une conique Γ', la conique Γ' est harmoniquement circonscrite à la conique Γ.*

La démonstration de ce théorème se déduit de la précédente par application du principe de dualité.

7. Applications. — 1° Nous avons vu que pour qu'une hyperbole équilatère soit harmoniquement circonscrite à un cercle, il faut et il suffit qu'elle passe par le centre du cercle. On en déduit, par application de ce qui précède, que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle soit harmoniquement inscrit à une hyperbole équilatère est que le centre de ce cercle soit situé sur l'hyperbole équilatère.

Il en résulte le théorème suivant :

Les hyperboles équilatères qui admettent un triangle donné comme triangle conjugué passent par les quatre points de concours des bissectrices de ce triangle.

Ces hyperboles équilatères forment un faisceau linéaire ponctuel de coniques, dont le triangle conjugué commun est le triangle donné.

2° Nous avons vu que pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que le cercle passe par le centre de l'hyperbole équilatère. On en déduit que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbole équilatère soit harmoniquement inscrite à un cercle est que son centre soit situé sur le cercle.

Il en résulte le théorème suivant :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites à un triangle est le cercle qui admet ce triangle comme triangle conjugué.

3° Enfin, nous avons vu que pour qu'une parabole soit harmoniquement inscrite à un cercle, il faut et il suffit que la directrice de la parabole passe par le centre du cercle. On en déduit que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une parabole est que son centre soit situé sur la directrice de la parabole.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une parabole est situé sur la directrice de la parabole.

8. Théorème. — *Parmi les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe une et, en général, une seule qui est harmoniquement circonscrite à une conique donnée Γ. S'il existe deux coniques du faisceau harmoniquement circonscrites à Γ, toute conique du faisceau est harmoniquement circonscrite à Γ.*

En effet, soit A un point commun aux coniques du faisceau linéaire ponctuel donné. La polaire Δ de A par rapport à Γ rencontre les coniques du faisceau en des couples de points qui forment une involution. D'autre part, il existe sur Δ une infinité de couples de points conjugués par rapport à Γ, qui forment aussi une involution. Pour qu'une conique du faisceau linéaire soit harmoniquement circonscrite à Γ, il faut et il suffit qu'elle rencontre Δ en deux points formant un couple commun à ces deux involutions. Or, ces deux involutions ont, en général, un couple commun et un seul ; d'autre part, si elles ont deux couples communs, elles coïncident. D'où le théorème.

Parmi les coniques du faisceau, il en existe en général trois qui sont formées de deux droites. Or, pour qu'une conique formée de deux droites soit harmoniquement circonscrite à Γ, il faut et il suffit que les deux droites soient conjuguées par rapport à Γ. On voit ainsi que

Si deux couples de côtés opposés d'un quadrangle sont formés de droites conjuguées par rapport à une conique Γ, il en est de même du troisième couple de côtés opposés.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on a le théorème suivant :

Parmi les coniques d'un faisceau linéaire tangentiel, il en existe une et, en général, une seule qui est harmoniquement inscrite à une conique donnée Γ. S'il existe deux coniques du faisceau harmoniquement inscrites à Γ, toute conique du faisceau est harmoniquement inscrite à Γ.

En particulier,

Si deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont formés de points conjugués par rapport à une conique Γ, il en est de même du troisième couple de sommets opposés.

9. Applications. — 1° Soient deux cercles C et C′ harmoniquement circonscrits à une conique Γ de centre O. Ces deux cercles définissent un faisceau linéaire ponctuel de coniques, qui contient la conique formée de la droite à l'infini et de l'axe radical Δ des deux cercles. Ces deux droites sont, d'après ce qui précède, conjuguées par rapport à Γ ; autrement dit, Δ passe par le centre O de Γ. On voit ainsi que le point O a même puissance par rapport à deux cercles quelconques harmoniquement circonscrits à Γ. Les cercles harmoniquement circonscrits à Γ sont donc orthogonaux à un cercle fixe ω concentrique à Γ.

Réciproquement, si un cercle C_1 est orthogonal au cercle ω, il est harmoniquement circonscrit à Γ. En effet, l'axe radical des cercles C et C_1 passe par O ; il forme par suite avec la droite à l'infini une conique harmoniquement circonscrite à Γ. Le cercle C étant harmoniquement circonscrit à Γ, le cercle C_1 qui fait partie d'un faisceau linéaire ponctuel de coniques contenant deux coniques harmoniquement circonscrites à Γ est lui-même harmoniquement circonscrit à Γ.

D'autre part, pour qu'un cercle de rayon nul soit harmoniquement circonscrit à Γ, il faut et il suffit que les deux droites isotropes

qui le constituent soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes à Γ qui passent par leur point d'intersection ; autrement dit, il faut et il suffit que les tangentes à Γ soient rectangulaires. Or, le cercle étant orthogonal à ω, son centre est situé sur le cercle ω. On a ainsi le théorème suivant, dû à Faure :

Pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une conique à centre, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à un cercle fixe concentrique à la conique, qu'on peut définir comme étant le lieu des points de rencontre de deux tangentes rectangulaires à cette conique.

Ce cercle est dit *cercle orthoptique* de la conique.

Parmi les points de ce cercle se trouvent en particulier les sommets du rectangle qui a pour côtés les tangentes aux sommets de la conique. Il en résulte immédiatement que le carré du rayon du cercle orthoptique de la conique Γ est égal à la somme des carrés des demi-longueurs des axes de cette conique.

En particulier, quand la conique Γ est une hyperbole équilatère, le cercle orthoptique est de rayon nul ; il s'ensuit que pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une hyperbole équilatère, il faut et il suffit qu'il passe par le centre de cette hyperbole. Nous retrouvons ainsi un résultat déjà démontré.

D'autre part, rappelons que, pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une parabole, il faut et il suffit que son centre soit situé sur la directrice. On peut encore dire qu'il faut et qu'il suffit qu'il soit orthogonal à la directrice, laquelle est le lieu des points de rencontre de deux tangentes rectangulaires à la parabole. La directrice d'une parabole est aussi dite *droite orthoptique* de la parabole.

2° Cela posé, du théorème de Faure, on peut déduire par application d'un théorème précédent (§ 6) le théorème suivant :

Pour qu'une conique soit harmoniquement inscrite à un cercle, il faut et il suffit que son cercle (ou droite) orthoptique soit orthogonal au cercle.

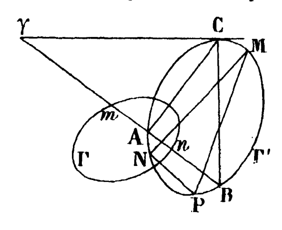
On a immédiatement les énoncés qui suivent :

Le cercle (ou droite) orthoptique d'une conique inscrite à un triangle est orthogonal au cercle qui admet ce triangle comme triangle conjugué.

Le lieu des centres des coniques qui sont inscrites à un triangle et qui sont telles que la somme des carrés des longueurs de leurs axes soit constante est un cercle qui a pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.

10. Soit une conique Γ' harmoniquement circonscrite à une conique Γ. Proposons-nous d'établir les relations qui existent entre les sommets des triangles tels que MNP qui sont inscrits à Γ' et conjugués par rapport à Γ.

Désignons par ABC une position particulière du triangle variable MNP. La droite AB rencontre Γ en deux points m et n conjugués harmoniques par rapport aux points A et B. Les coniques qui passent par les quatre points M, N, P, C sont harmoniquement circonscrites à la conique Γ et rencontrent par suite la droite AB en des couples de points conjugués harmoniques par rapport aux points m et n. Parmi ces coniques, il en existe une qui est tangente en m à la droite AB.



Appliquons à cette conique la relation qui existe entre les six points de rencontre d'une conique variable avec une conique et une droite fixes se rencontrant en deux points distincts (I, § 4). Soit γ le point où la tangente en C à Γ' rencontre AB. Désignons par R_1, R_2, R_3 les rapports anharmoniques sur Γ' des points (A, B, M, C), (A, B, N, C), (A, B, P, C) et par r le rapport anharmonique sur AB des points A, B, m, γ. On a, quand le triangle MNP varie,

$$R_1R_2R_3 = r^2 = \text{const.}$$

C'est une première relation entre les trois sommets du triangle variable MNP. On obtient une seconde relation en considérant, au lieu du côté AB, l'un des deux autres côtés du triangle ABC. Il ne peut y avoir d'ailleurs plus de deux relations distinctes.

Cela posé, représentons un point variable de Γ' par un paramètre représentant linéairement autour d'un point fixe O de Γ' la droite qui joint le point O au point variable considéré. Soient a, b, c les paramètres des points M, N, P et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ceux des points A, B, C. Les relations précédentes deviennent

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{\alpha} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{\beta} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{\gamma},$$

α, β, γ étant trois nombres non simultanément nuls qui restent constants quand, le triangle MNP variant, le triangle ABC est fixe.

Si donc a', b', c' sont les paramètres des sommets d'un autre triangle M'N'P' inscrit à Γ' et conjugué par rapport à Γ, on a les égalités

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(a'-\lambda_1)(b'-\lambda_1)(c'-\lambda_1)} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(a'-\lambda_2)(b'-\lambda_2)(c'-\lambda_2)} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(a'-\lambda_3)(b'-\lambda_3)(c'-\lambda_3)}.$$

Si nous posons

$$g(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c), \qquad h(\lambda) = (\lambda - a')(\lambda - b')(\lambda - c'),$$

ces égalités deviennent

$$\frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} = \frac{g(\lambda_2)}{h(\lambda_2)} = \frac{g(\lambda_3)}{h(\lambda_3)}.$$

Il en résulte que λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines d'une équation du troisième degré de la forme

$$g(\lambda) - \rho h(\lambda) = 0,$$

$g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ étant des polynomes dont les coefficients sont déterminés quand on donne les deux triangles MNP et M'N'P', ρ étant variable en même temps que le triangle ABC.

Or, le triangle ABC est une position quelconque du triangle MNP. Donc,

L'équation aux paramètres des sommets d'un triangle inscrit à une conique Γ' qui varie en restant conjugué par rapport à une conique fixe Γ, c'est-à-dire en restant circonscrit à une conique fixe Γ'', est de la forme

$$g(\lambda) - \rho h(\lambda) = 0,$$

ρ étant un nombre variable.

Ce théorème admet un théorème corrélatif concernant les paramètres de trois tangentes variables à une conique Γ'' formant un triangle qui reste conjugué par rapport à une conique fixe Γ, c'est-à-dire inscrit à une conique fixe Γ'.

11. Applications. — 1° Voici une application de la relation

$$R_1R_2R_3 = \text{const.}$$

établie au paragraphe précédent.

Reprenant les mêmes notations, supposons que les points A et B soient les points cycliques. Alors, la conique Γ' est un cercle et la conique Γ'' est une parabole ayant son foyer en C. On a le théorème suivant :

On considère les triangles circonscrits à une parabole et inscrits à un cercle passant par le foyer de la parabole. La somme des angles que font avec une direction fixe les droites qui joignent le foyer de la parabole aux sommets d'un tel triangle est constante.

En même temps, la conique Γ par rapport à laquelle les triangles précédents sont conjugués est une hyperbole équilatère qui a pour centre le foyer de la parabole. On a ainsi le théorème suivant :

On considère les triangles conjugués par rapport à une hyperbole équilatère et inscrits à un cercle passant par le centre de l'hyperbole. La somme des angles que font avec une direction fixe les droites qui joignent le centre de l'hyperbole aux sommets d'un tel triangle est constante.

2° Les points m et n où la conique Γ rencontre la droite AB sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B. Le rapport anharmonique des points A, B, n, γ sur la droite AB est donc égal à $-r$. Cela posé, considérons la conique qui passe par les cinq points M, N, P, m, n. Elle rencontre la conique Γ' en un quatrième point Q. Je dis que ce point est fixe quand le triangle MNP varie. En effet, posons

$$R = (ABQC).$$

Par application de la relation entre les six points de rencontre d'une conique variable avec la conique Γ' et avec la droite AB, on a

$$RR_1R_2R_3 = -r^2.$$

Or, on a

$$R_1R_2R_3 = r^2;$$

donc on a $R = -1$. Par suite, le point Q est le conjugué harmonique, sur Γ', du point C par rapport aux points A et B.

En particulier, supposons que m et n soient les points cycliques. On a alors le théorème suivant :

Étant donnés une hyperbole équilatère et un cercle ayant son centre O sur l'hyperbole, il existe une infinité de triangles inscrits à l'hyper-

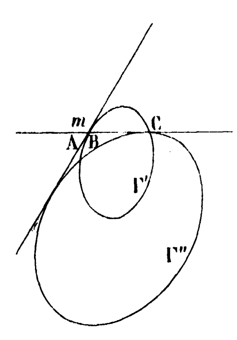
bole et conjugués par rapport au cercle. Le cercle circonscrit à un tel triangle passe par un point fixe, qui est le point de l'hyperbole équilatère diamétralement opposé au point O.

En outre, le cercle variable, étant, d'après le théorème de Faure, orthogonal au cercle orthoptique du cercle donné, passe par un second point fixe situé sur le diamètre de l'hyperbole qui passe par O. Par suite,

Le centre du cercle circonscrit au triangle variable décrit une droite perpendiculaire au diamètre de l'hyperbole équilatère qui passe par le point O.

12. Le raisonnement précédent suppose que la droite AB rencontre la conique Γ en deux points distincts. Étudions le cas où les points A et B sont confondus.

Parmi les triangles inscrits à une conique Γ′ et conjugués par rapport à une conique Γ, il en existe, en général, quatre qui sont tels que deux de leurs sommets soient confondus, ainsi que deux de leurs côtés. Un sommet C d'un de ces quatre triangles coïncide avec un point d'intersection de Γ′ et de Γ″; les deux autres sommets A et B sont confondus avec le point m d'intersection autre que C de la conique Γ′ et de la tangente en C à Γ″. Le point m est à l'intersection de Γ′ et de Γ, et le côté double CA (ou CB) est une tangente commune à Γ″ et à Γ. Enfin, le côté AB est une tangente commune à Γ′ et à Γ″.



Soit n le second point d'intersection de ce côté avec Γ. Si MNP est un triangle inscrit à Γ′ et conjugué par rapport à Γ, les coniques qui passent par les quatre points M, N, P, C sont harmoniquement circonscrites à Γ et rencontrent la droite mn en des couples de points conjugués harmoniques par rapport aux points m et n. Parmi ces coniques, il en existe une qui est tangente à la droite mn en n.

Appliquons à cette conique la relation qui existe entre les six points de rencontre d'une conique variable avec une conique et une droite fixes se touchant en un point (I, § 7). Soient, sur la conique Γ′, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les paramètres des points M, N, P, α le paramètre du point m, h le paramètre du point C, enfin, μ le paramètre du point

de contact de la tangente, autre que mn, menée de n à la conique Γ'. On a la relation

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} + \frac{1}{h - \alpha} = \frac{4}{\mu - \alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} = \text{const.}$$

On a ainsi les théorèmes suivants :

S'il existe une infinité de triangles inscrits à une conique Γ' et circonscrits à une conique Γ'', le pôle harmonique sur Γ' du point de contact avec Γ' d'une tangente commune à Γ' et à Γ'' par rapport aux sommets de l'un de ces triangles est un point fixe.

En particulier,

S'il existe une infinité de triangles inscrits à une parabole P_1 et circonscrits à une parabole P_2, les centres de gravité de ces triangles sont situés sur une même droite parallèle à l'axe de la parabole P_1.

S'il existe une infinité de triangles circonscrits à une parabole et inscrits à une conique dont une direction asymptotique coïncide avec celle de la parabole, les centres de gravité des triangles qui ont pour sommets les points de contact des côtés des premiers triangles avec la parabole sont situés sur une même droite parallèle à l'axe de la parabole.

CHAPITRE III

THÉORÈMES RELATIFS AUX FAISCEAUX LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE CONIQUES

1. Théorème. — *Les polaires d'un point* P *par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel passent par un même point* P′ *Les polaires de* P′ *par rapport à ces coniques passent par* P.

Soient en effet Δ_1 et Δ_2 les polaires de P par rapport à deux coniques Γ_1 et Γ_2 du faisceau. En général, ces deux droites sont distinctes et ont un point commun P′. Les coniques du faisceau sont rencontrées par la droite PP′ en des couples de points qui font partie d'une même involution. Or, le couple des points P et P′ est harmonique par rapport aux deux couples de points d'intersection de la droite PP′ avec les coniques Γ_1 et Γ_2; il s'ensuit que P et P′ sont les points doubles de l'involution et qu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la droite PP′ avec une conique quelconque Γ du faisceau; autrement dit, la polaire de P par rapport à la conique Γ passe par P′.

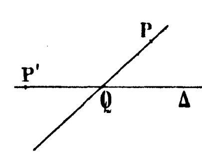
Il peut arriver que les droites Δ_1 et Δ_2 soient confondues suivant une droite Δ; alors, le raisonnement précédent s'applique si l'on prend pour point P′ un point quelconque de Δ. Il en résulte que les polaires de P par rapport à toutes les coniques du faisceau sont confondues avec Δ. On sait que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que P soit un point double d'une conique décomposée en deux droites faisant partie du faisceau linéaire considéré.

Comme la polaire de P par rapport à une conique Γ du faisceau passe par P′, la polaire de P′ par rapport à Γ passe par P.

En supposant que P n'a pas même polaire par rapport aux coniques Γ, montrons que *toute droite qui passe par* P′ *est la polaire de* P *par rapport à une conique* Γ.

En effet, soit Δ une droite passant par P′. Menons par P une droite quelconque rencontrant Δ en un point Q distinct de P′. Pour que la conique Γ soit telle que la polaire de P par rapport à

cette conique soit Δ, il faut et il suffit que le couple des points de rencontre de cette conique Γ avec la droite PQ fasse partie de l'involution qui a pour points doubles P et Q et par suite soit commun à cette involution et à l'involution formée par les couples de points d'intersection des coniques Γ et de la droite PQ. Or, ces deux involutions sont distinctes, sinon le point P aurait la même polaire Δ par rapport aux coniques Γ; étant distinctes, elles ont un couple commun et un seul, et la proposition est établie.



Si l'on considère une conique Γ décomposée en deux droites qui se coupent en un point O, les points P et P′ sont conjugués par rapport à cette conique; autrement dit, les droites OP et OP′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites qui forment la conique Γ.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on a le théorème suivant :

Les pôles d'une droite Δ par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel sont sur une même droite Δ′. Les pôles de Δ′ par rapport à ces coniques sont sur la droite Δ.

Il peut arriver que la droite Δ ait même pôle par rapport aux coniques du faisceau. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'elle joigne les deux points qui forment une conique décomposée du faisceau.

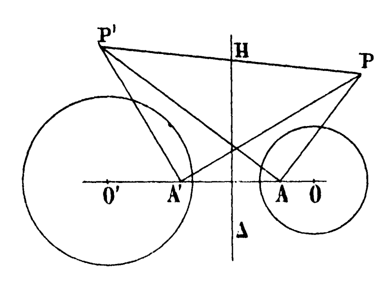
Si l'on suppose que Δ n'a pas même pôle par rapport aux coniques du faisceau, tout point de Δ′ est pôle de Δ par rapport à une de ces coniques.

Si I et I′ sont les deux points qui forment une conique décomposée du faisceau, les droites Δ et Δ′ rencontrent la droite II′ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points I et I′.

Applications. — 1° Soit un faisceau linéaire ponctuel de cercles Γ. Parmi les cercles de ce faisceau se trouvent, en général, deux cercles de rayon nul, de centres A et A′. Les polaires de P par rapport à ces deux cercles sont les perpendiculaires menées par A et A′ respectivement aux droites AP et A′P; le point P′ commun aux polaires de P par rapport aux cercles Γ est le point d'intersection de ces deux droites; on voit qu'il est diamétralement opposé à P sur le cercle qui passe par P, A et A′. Les points P et P′ sont conjugués

par rapport au cercle singulier formé par l'axe radical Δ des cercles Γ et la droite à l'infini; autrement dit, le milieu H du segment PP′ est situé sur Δ.

Lorsque les cercles Γ sont tangents entre eux en un point A, le point P′ est diamétralement opposé au point P sur le cercle qui passe par P et qui est tangent en A à la ligne des centres des cercles Γ.



2° Soient les coniques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère complet; elles forment un faisceau linéaire tangentiel. Les centres de ces coniques étant les pôles de la droite à l'infini par rapport à ces coniques, on a le théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère complet est une droite.

Cette droite passe par les milieux des diagonales du quadrilatère, et, pour cette raison, elle est dite *médiane du quadrilatère*. D'autre part, elle est parallèle à la direction asymptotique de la parabole inscrite au quadrilatère.

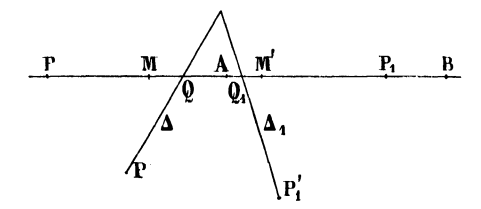
3° Soit une conique à centre ayant pour foyers réels les deux points F et F′. Il existe une infinité de coniques Γ ayant pour foyers F et F′; ces coniques sont inscrites à un quadrilatère complet qui a pour côtés les deux droites FI et FJ et les deux droites F′I et F′J, I et J étant les points cycliques. Les points F et F′, d'une part, les points I et J, d'autre part, forment deux couples de sommets opposés du quadrilatère; le troisième couple de sommets opposés est formé de deux points imaginaires conjugués φ et φ′, qui sont aussi foyers de chacune des coniques Γ. Le lieu des pôles d'une droite Δ par rapport à ces coniques est une droite Δ′ qui rencontre la droite à l'infini au point conjugué harmonique du point à l'infini de Δ par rapport aux points cycliques; autrement dit, *les droites Δ et Δ′ sont rectangulaires.* Ces droites rencontrent l'axe focal FF′ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points F et F′.

4° Soient les paraboles Γ qui ont un foyer F donné et un axe

donné. Elles forment un faisceau linéaire tangentiel qui contient comme conique décomposée le couple des points cycliques. Le lieu des pôles d'une droite Δ par rapport à ces paraboles est encore une droite Δ' perpendiculaire à Δ. Les deux droites Δ et Δ' rencontrent l'axe commun des paraboles Γ en deux points symétriques par rapport au foyer F.

2. Théorème. — *Étant données quatre coniques d'un faisceau linéaire ponctuel, les quatre polaires d'un point variable* P *par rapport à ces coniques ont un rapport anharmonique constant.*

Soient en effet une conique variable Γ d'un faisceau linéaire



ponctuel, et deux points fixes P et P_1. Les polaires Δ et Δ_1 de P et de P_1 par rapport à Γ passent respectivement par deux points fixes P' et P'_1. Elles rencontrent la droite PP_1 en deux points Q et Q_1 qui sont conjugués harmoniques de P et de P_1 par rapport aux deux points de rencontre M et M' de la droite PP_1 avec la conique Γ.

Soient A et B les points doubles de l'involution formée par les couples de points d'intersection de la droite PP_1 et des coniques du faisceau linéaire ponctuel donné. Les couples de points (P, Q), (P_1, Q_1) et (A, B) font partie d'une même involution qui a pour points doubles M et M' ; il s'ensuit que l'on a

$$(QQ_1AB) = (PP_1BA) = \text{const.}$$

Les points Q et Q_1 décrivent donc sur la droite PP_1 des divisions homographiques ayant pour points doubles les points A et B ; les droites Δ et Δ_1 décrivent des faisceaux homographiques de sommets P' et P'_1 ; le rapport anharmonique de quatre positions de Δ est égal au rapport anharmonique des quatre positions correspondantes de Δ_1.

La démonstration précédente suppose que les points A et B sont distincts, autrement dit, que la droite PP_1 ne passe pas par un point

commun aux coniques Γ. Si PP_1 passe par un point commun aux coniques Γ, on considérera un point P_2 tel que les droites PP_2 et P_1P_2 ne passent ni l'une ni l'autre par un point commun aux coniques Γ, et on appliquera la démonstration précédente aux points P et P_2, d'une part, aux points P_1 et P_2, d'autre part.

Théorème corrélatif. — *Étant données quatre coniques d'un faisceau linéaire tangentiel, les quatre pôles d'une droite variable Δ par rapport à ces coniques ont un rapport anharmonique constant.*

Il suffit d'appliquer à la démonstration précédente le principe de dualité.

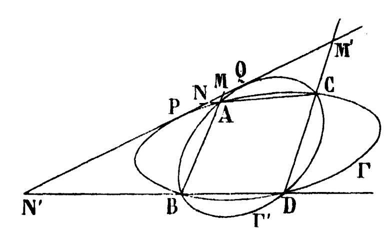
Définitions. — Étant données quatre coniques d'un faisceau linéaire ponctuel, on appelle *rapport anharmonique de ces coniques* le rapport anharmonique constant des polaires d'un point quelconque par rapport à ces coniques. Il est égal au rapport anharmonique des tangentes à ces coniques en l'un quelconque de leurs points communs.

Étant données quatre coniques d'un faisceau linéaire tangentiel, on appelle *rapport anharmonique de ces coniques* le rapport anharmonique constant des pôles d'une droite quelconque par rapport à ces coniques. Il est égal au rapport anharmonique des points de contact avec ces coniques de l'une quelconque de leurs tangentes communes.

Applications. — 1° Soient deux cercles Γ et Γ' se rencontrant en deux points A et B. Il existe deux cercles de rayon nul qui passent par A et B et qui font partie du faisceau linéaire ponctuel de cercles contenant les deux cercles donnés. Le rapport anharmonique des deux cercles de rayon nul et des deux cercles Γ et Γ', considérés dans cet ordre, est égal au rapport anharmonique de leurs tangentes en A; or, les deux premières tangentes sont les droites isotropes qui passent par A; donc, d'après la formule de Laguerre, le rapport anharmonique des quatre cercles est égal à $e^{\mp 2iV}$, V étant l'angle des tangentes en A aux cercles Γ et Γ'. En particulier, il est égal à -1 quand les cercles Γ et Γ' sont orthogonaux.

2° Soient deux coniques Γ et Γ' se coupant aux quatre points A, B, C, D. Une tangente Δ commune aux deux coniques les touche respectivement aux points P et Q; soient M et M' les points de rencontre de Δ avec les droites AB et CD, N et N' les points de

rencontre de Δ avec les droites AC et BD. Considérons une représentation paramétrique linéaire de Δ telle que les points P et Q aient respectivement pour paramètres o et ∞. Les points M et M', qui, d'après le théorème de Desargues, sont conjugués harmoniques par rapport aux points P et Q, ont des paramètres opposés, λ et $-\lambda$; de même, N et N' ont des paramètres opposés, μ et $-\mu$. Il est facile de voir que, O étant le point de Δ qui a pour paramètre 1, les conjugués E et F de O par rapport aux points M et M' et par rapport aux points N et N' ont pour paramètres λ^2 et μ^2. Or, le rapport anharmonique des deux coniques Γ et Γ', de la conique formée par les droites AB et CD et de la conique formée par les droites AC et BD est égal au rapport anharmonique des quatre points P, Q, E, F où les polaires de O par rapport à ces coniques rencontrent Δ, lequel est égal à $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$. D'autre part, le rapport anharmonique des quatre points M, M', N et N' est égal à



$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)^2}.$$

Il s'ensuit que si le premier rapport anharmonique est constant, il en est de même du second. Par exemple, supposons que les coniques Γ et Γ' passent par quatre points fixes A, B, C, D et varient de façon que leurs tangentes en A aient un rapport anharmonique constant avec les droites AB et AC. Le rapport anharmonique des quatre points de rencontre d'une tangente commune Δ à ces coniques avec les quatre droites AB, CD, AC, BD est constant, et la droite Δ a pour enveloppe, d'après le théorème corrélatif du théorème de Chasles, une conique tangente à ces quatre droites.

En particulier,

Si deux cercles passant par deux points fixes varient de façon à se couper sous un angle constant, l'enveloppe de leurs tangentes com-

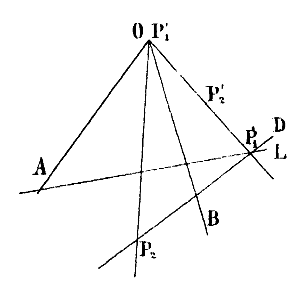
munes est une conique qui admet les deux points fixes comme foyers.

Ce théorème est dû à Faure ([1]).

3. Théorème. — *Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel est une conique.*

En effet, soient P_1 et P_2 deux points de la droite fixe D, Δ_1 et Δ_2 les polaires de P_1 et de P_2 par rapport à une conique Γ variable du faisceau. Le pôle de D par rapport à Γ est le point M d'intersection de Δ_1 et de Δ_2. Or, quand Γ varie, les droites Δ_1 et Δ_2 varient en passant respectivement par deux points fixes P'_1 et P'_2, et le rapport anharmonique de quatre positions de Δ_1 est égal au rapport anharmonique des quatre positions correspondantes de Δ_2 ; les droites Δ_1 et Δ_2 se correspondent donc homographiquement, et, d'après le théorème de Chasles, le lieu S du point M est une conique.

Pour que cette conique S se décompose, il faut et il suffit qu'il existe une conique Γ du faisceau linéaire ponctuel telle que les points de D aient tous même polaire par rapport à Γ. On voit facilement que pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que D passe par un point double O d'une conique Γ décomposée du faisceau ; le lieu est alors formé de la polaire unique de ce point double O par rapport aux coniques Γ et de la droite conjuguée harmonique de D par rapport aux droites qui forment la conique Γ décomposée.



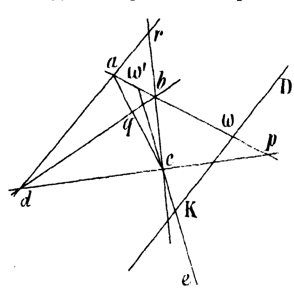
En général, le lieu S est une conique proprement dite qui passe par tout point ayant même polaire par rapport aux coniques Γ.

Soit O un point double d'une conique Γ décomposée en deux droites OA et OB ; c'est un point de la conique S ; cherchons la tangente en ce point. A cet effet, prenons sur la droite comme point P_1 le point de rencontre de D avec la polaire L de O par rapport aux coniques Γ et comme point P_2 le point de rencontre de D avec la droite conjuguée harmo-

([1]) On peut aussi établir ce théorème en montrant, à l'aide d'une inversion ayant pour pôle un des deux points fixes donnés, que le lieu des projections de ce point fixe sur les tangentes communes aux deux cercles variables est un cercle.

nique de OP_1 par rapport aux droites OA et OB. Le point P'_1 coïncide avec le point O et le point P'_2 est situé sur la droite OP_1, polaire de P_2 par rapport à la conique Γ de point double O. Quand la conique variable du faisceau tend vers cette conique décomposée, les polaires Δ_1 et Δ_2 de P_1 et de P_2 par rapport à cette conique variable tendent respectivement vers OP_2, c'est-à-dire P'_1P_2, et vers OP_1, c'est-à-dire P'_2O; ces deux droites se rencontrent en O qui est un point du lieu, et la tangente en ce point est la droite OP_2.

Supposons que les coniques Γ aient quatre points communs distincts a, b, c, d. Soient p, q, r les points de rencontre de ab et de cd, de ac et de db, de ad et de bc, respectivement. La conique S est circonscrite au triangle pqr, qui est conjugué par rapport à chacune des coniques Γ. Voici, grâce à la considération de ce triangle, une autre démonstration du théorème précédent. Il existe deux coniques Γ qui sont tangentes à D en deux points I et J. Si M est le pôle de D par rapport à une conique Γ quelconque, le triangle MIJ est conjugué par rapport à cette conique. D'après le théorème de Poncelet (II, § 1), les six points p, q, r, M, I, J sont sur une même conique S, qui est fixe, passant par les cinq points fixes p, q, r, I, J, et est ainsi le lieu du point M.



Montrons que la conique S passe par tout point conjugué harmonique par rapport à deux quelconques des sommets du quadrangle $abcd$ du point de rencontre du côté du quadrangle qui passe par ces deux points avec la droite D. Par exemple, soient ω le point d'intersection de D et de la droite ab et ω' le conjugué harmonique de ω par rapport aux points a et b. Menons la droite ω'c qui rencontre la droite D en K; soit e le conjugué harmonique de c par rapport aux points ω' et K. Il existe une conique Γ qui passe par e; la polaire de ω par rapport à cette conique Γ passe par K, conjugué harmonique de ω' par rapport aux points c et e, et par ω, conjugué harmonique de ω' par rapport aux points a et b; elle coïncide donc avec D, et ainsi le point ω' est le pôle de D par rapport à une conique Γ.

Il existe six points tels que ω'; la conique S passe par onze points remarquables : les six points ω', les trois points p, q, r et les deux points I et J.

Applications. — 1° Supposons que la droite D soit la droite à l'infini. On a alors le théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques d'un faisceau linéaire ponctuel est une conique.

Les directions asymptotiques de cette conique sont les directions asymptotiques des coniques du faisceau qui sont tangentes à la droite à l'infini.

2° En particulier, supposons que les coniques Γ passent par les sommets *a*, *b*, *c*, *d* d'un quadrangle orthocentrique ; ce sont des hyperboles équilatères qui rencontrent la droite à l'infini en des couples de points qui forment une involution ayant pour points doubles les points cycliques I et J.

Les points cycliques sont les points à l'infini de la conique S, qui est donc un cercle. Ce cercle passe par les milieux des côtés du quadrangle et par les points de rencontre des côtés opposés du quadrangle ; il est le cercle des neuf points commun aux quatre triangles qui ont pour sommets trois des sommets du quadrangle.

3° Supposons que les coniques Γ passent par quatre points *a*, *b*, *c*, *d* situés sur un même cercle, qui est une conique Γ particulière. Ces coniques rencontrent la droite à l'infini en des couples de points en involution, parmi lesquels se trouve le couple des points cycliques. Les points doubles de l'involution sont donc à l'infini dans deux directions rectangulaires, qui sont les directions asymptotiques du lieu S. Ainsi, dans ce cas, la conique S est une hyperbole équilatère.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on a le théorème suivant :

L'enveloppe Σ des polaires d'un point fixe P par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel est une conique.

Cette conique est en général proprement dite ; elle ne se décompose en deux points que si le point donné est situé sur une tangente double d'une conique décomposée du faisceau.

La conique Σ est tangente à toute droite L ayant même pôle O par rapport aux coniques du faisceau ; le point de contact de L et de Σ est le conjugué harmonique du point d'intersection des droites OP et L par rapport aux deux points situés sur L qui forment une conique décomposée du faisceau.

Les tangentes menées par le point donné P à la conique Σ sont

les tangentes en P aux coniques du faisceau qui passent par ce point. Si les coniques du faisceau ont quatre tangentes communes distinctes, elles ont un triangle conjugué commun, et l'enveloppe Σ est inscrite à ce triangle.

Applications. — 1° En particulier, l'enveloppe Σ des polaires d'un point P par rapport aux coniques homofocales à une ellipse donnée est une parabole tangente aux deux axes de ces coniques. Les tangentes menées à Σ par le centre O de ces coniques sont rectangulaires ; il en est de même des tangentes menées par P à Σ ; il s'ensuit que la directrice de la parabole Σ est la droite OP.

2° Soient les paraboles, dites *homofocales*, qui ont un foyer et un axe donnés; elles forment un faisceau linéaire tangentiel de coniques tangentes en un même point α à la droite à l'infini. Parmi ces coniques se trouve une conique décomposée en les deux points cycliques I et J. L'enveloppe Σ des polaires d'un point P par rapport aux paraboles homofocales est une conique qui est tangente à la droite à l'infini, cette droite ayant même pôle α par rapport aux coniques du faisceau ; la conique Σ est donc une parabole. Son point de contact avec la droite à l'infini est conjugué harmonique de α par rapport aux points cycliques ; autrement dit, la parabole Σ a pour direction asymptotique la direction perpendiculaire à la direction asymptotique commune aux paraboles homofocales. D'autre part, l'axe des paraboles homofocales, ayant même pôle par rapport à ces coniques, est une tangente à la parabole Σ ; c'est la tangente au sommet de Σ. La directrice de Σ passe par P ; c'est la parallèle à l'axe des paraboles homofocales menée par ce point.

3° Soit un faisceau linéaire tangentiel de coniques contenant un cercle de centre O. L'enveloppe Σ des polaires de O par rapport à ces coniques est une parabole. Les tangentes à Σ qui passent par O sont les rayons doubles de l'involution formée par les couples de tangentes menées de O aux coniques du faisceau ; l'un de ces couples étant le couple des droites isotropes qui passent par O, les rayons doubles sont rectangulaires ; autrement dit, la directrice de la parabole Σ passe par le point O.

Théorème. — *Le lieu des pôles d'une droite* D *par rapport aux coniques* Γ *d'un faisceau linéaire ponctuel coïncide avec le lieu du point* P′ *commun aux polaires par rapport à ces coniques d'un point* P *variable sur la droite* D.

En effet, les polaires de P′ par rapport aux coniques Γ sont con-

courantes au point P, et, comme nous l'avons vu, toute droite passant par P est polaire de P' par rapport à une conique Γ. En particulier, il existe une conique Γ par rapport à laquelle le pôle de D est le point P', ce qui démontre le théorème.

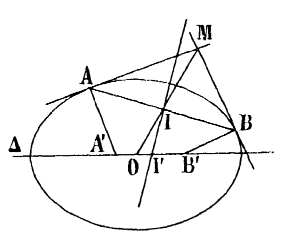
Théorème corrélatif. — *L'enveloppe des polaires d'un point P par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel coïncide avec l'enveloppe de la droite Δ' lieu des pôles par rapport à ces coniques d'une droite Δ variable qui passe par le point P.*

Applications. — 1° Soient les coniques Γ qui ont mêmes foyers qu'une conique donnée de centre O. Le lieu des pôles d'une droite Δ par rapport à ces coniques est, comme nous l'avons vu, une droite Δ' perpendiculaire à Δ ; le point de rencontre de ces deux droites est le point de contact M avec la droite Δ de la conique Γ qui lui est tangente ; la droite Δ' est la normale en M à cette conique. On a donc le théorème suivant :

L'enveloppe de la normale à une conique variable Γ en un point M de contact d'une tangente menée par un point fixe P est une parabole tangente aux axes des coniques Γ et admettant pour directrice la droite OP.

2° Soient les paraboles Γ qui ont un foyer et un axe donnés. On a, relativement à ces paraboles homofocales, le théorème suivant :

L'enveloppe de la normale à une parabole variable Γ en un point M *de contact d'une tangente menée par un point fixe P est une parabole ayant pour tangente au sommet l'axe des paraboles Γ et pour directrice la parallèle à cette droite menée par* P.



3° Soient une conique de centre O, A et B les points de contact des tangentes menées d'un point M à cette conique. D'après ce qui précède, il existe une parabole H tangente aux axes de la conique, à la droite AB et aux normales en A et B à la conique ; cette parabole a pour directrice la droite OM. La droite OM rencontre AB en son milieu I, et, d'après une propriété de la directrice d'une parabole, la perpendiculaire en I à la droite AB est tangente à la parabole H. Soient A', B', I' les points de rencontre d'un axe Δ de la conique donnée avec ses nor-

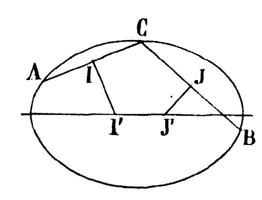
males en A et B et avec la perpendiculaire menée par I à AB. D'après le théorème corrélatif du théorème de Chasles, les deux tangentes AB et Δ à la parabole H sont partagées par les droites AA′, BB′, II′ en vecteurs proportionnels. Comme I est le milieu de AB, I′ est le milieu de A′B′. On a ainsi le théorème suivant, dû à Laguerre :

On donne deux points A et B d'une conique à centre. Si A′ et B′ sont les points de rencontre des normales en A et B avec un axe de la conique, la perpendiculaire à AB en son milieu rencontre l'axe au milieu de A′B′.

On en déduit le théorème suivant :

Soient deux points fixes A et B et un point variable C d'une conique à centre. Si I′ et J′ sont les points de rencontre avec un axe de la conique des perpendiculaires aux segments AC et BC en leurs milieux I et J, le vecteur I′J′ est équipollent à un vecteur fixe.

4° Soient une parabole P, A et B les points de contact des tangentes menées d'un point M à cette parabole. D'après ce qui précède, il existe une parabole H tangente à l'axe de la parabole P, à la droite AB, aux normales en A et B à la parabole P, et admettant pour directrice la parallèle menée par M à l'axe de la parabole P. Cette droite rencontre AB en son milieu I, et la perpendiculaire en I à la droite AB est aussi tangente à H. On voit alors que le théorème de Laguerre et la conséquence qu'on en tire sont applicables aussi à la parabole.



4° Soient une conique à centre, A et B les points de contact des tangentes menées d'un point M à cette conique. Puisque les normales en A et B à la conique, les deux axes de la conique et la droite AB sont tangentes à une même parabole, les deux premières droites sont partagées par les trois dernières en vecteurs proportionnels. On a ainsi le théorème suivant :

A étant un point variable d'une conique à centre, si P et Q sont les points d'intersection de la normale en A avec l'axe focal et avec l'axe non focal, le rapport $\frac{AP}{AQ}$ *est constant.*

5° Soient une conique à centre Γ variant de façon que ses foyers

restent fixes, A et B les points de contact des tangentes menées à cette conique par un point fixe M. Le triangle T qui a pour côtés la droite AB et les normales en A et B à Γ est circonscrit à une parabole fixe H. Un autre triangle circonscrit à cette parabole est le triangle qui a pour côtés les axes de la conique et la droite à l'infini. Il existe une conique ayant pour axes les axes fixes de la conique Γ et admettant le triangle T comme triangle conjugué.

Cela posé, supposons que la conique Γ vienne à passer par M ; les points A et B se confondent alors avec M, et le point de rencontre des normales en A et B à Γ se confond avec le centre de courbure de la conique Γ qui est relatif au point M. On a ainsi le théorème suivant :

La parabole H touche les normales aux coniques Γ_1 *et* Γ_2 *qui passent par* M *en deux points qui sont les centres de courbure* I_1 *et* I_2 *de ces coniques* Γ *relatifs au point* M.

D'autre part, il existe une conique S ayant pour axes les axes des coniques Γ et admettant comme triangle conjugué le triangle aplati dont deux sommets sont confondus en M, la droite qui les joint étant la tangente en M à la conique Γ_1, et dont le troisième sommet est le point I_1. Cette conique S admet comme tangente en M la droite MI_1 qui est aussi tangente en M à Γ_2. Comme il n'existe qu'une conique admettant un triangle donné comme triangle conjugué et tangente à une droite donnée en un point donné, la conique S coïncide avec Γ_2. On a par suite le théorème suivant :

Étant données deux coniques à centre homofocales, si M *est un de leurs points communs, le centre de courbure de l'une d'elles relatif à* M *est le pôle de la tangente en* M *à cette conique par rapport à l'autre conique,*

ou encore

Étant données deux coniques à centre homofocales, si M *est un de leurs points communs, les centres de courbure des coniques relatifs à* M *sont conjugués par rapport à chacune de ces coniques.*

Si l'on considère des paraboles Γ homofocales, la démonstration précédente leur est applicable, à condition de remplacer le triangle formé par les axes des coniques homofocales à centre et la droite à l'infini par le triangle aplati dont deux côtés sont confondus avec la droite à l'infini, le point de rencontre de ces côtés étant le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la direction asymptotique des paraboles Γ, et dont le troisième côté est l'axe commun aux paraboles Γ.

Par application du théorème de Faure relatif aux triangles conjugués par rapport à une conique, on a aussi le théorème suivant :

Si I *est le centre de courbure relatif à un point* M *d'une conique* Γ, *le cercle de diamètre* MI *est orthogonal au cercle (ou droite) orthoptique de la conique homofocale à* Γ *qui passe par* M.

6° Soient une conique à centre Γ variant de façon que ses foyers restent fixes, A et B les points de contact des tangentes menées à cette conique par un point fixe M, N le point d'intersection des normales en A et B. On a le théorème suivant :

Le lieu du point N *est une droite* Δ.

En effet, le triangle NAB est circonscrit à une parabole fixe Π, et le cercle circonscrit au triangle NAB, qui passe par M, passe aussi par le foyer φ de la parabole Π. La droite φN, qui est la perpendiculaire en φ à la droite φM, est une droite fixe, et cette droite Δ est le lieu du point N.

De plus, M étant un point de la directrice de la parabole Π, sa polaire par rapport à Π est la droite Δ. Les deux tangentes NA et NB qu'on peut mener d'un point N de la droite Δ à la parabole Π sont conjuguées harmoniques par rapport à Δ et à la droite qui joint le point N au pôle M de Δ par rapport à la parabole Π. Il est donc facile de construire cette droite Δ connaissant les deux foyers réels F et F′ des coniques Γ. Un point du lieu est le point N_1 diamétralement opposé à M sur le cercle circonscrit au triangle MFF′ ; la droite Δ est la droite conjuguée harmonique de la droite N_1M par rapport aux droites N_1F et N_1F'.

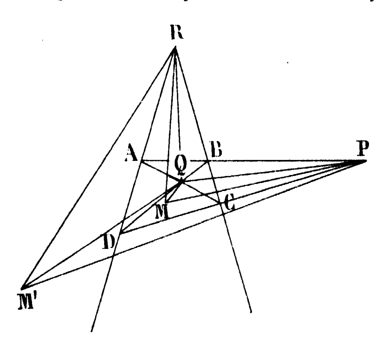
Si la conique variable Γ vient à passer par M, le point N coïncide avec le centre de courbure de la conique Γ qui est relatif au point M. La droite Δ est la droite qui passe par les centres de courbure I_1 et I_2 relatifs à M des coniques Γ_1 et Γ_2 de foyers F et F′ qui passent par M. Ce résultat donne un moyen de construire le centre de courbure relatif à un point M d'une conique à centre.

Avec des modifications faciles, le raisonnement s'applique aux paraboles homofocales.

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION QUADRATIQUE

1. Soit un faisceau linéaire ponctuel de coniques Γ, ayant quatre points communs distincts A, B, C, D. Parmi ces coniques, il en existe trois qui sont décomposées en deux côtés opposés du quadrangle ayant pour sommets A, B, C, D. Soient P, Q, R les points de rencontre respectifs des côtés AB et CD, AC et DB, AD et BC; le triangle PQR est conjugué par rapport à chacune des coniques Γ.



Les polaires d'un point M quelconque du plan par rapport aux coniques Γ sont concourantes en un point M', qui est, en particulier, le point commun aux droites conjuguées harmoniques des droites PM, QM et RM respectivement par rapport aux droites AB et CD, AC et DB, AD et BC. Le point M' sera dit *transformé quadratique de* M (1). Comme les polaires de M' par rapport aux coniques Γ sont concourantes en M, le point M est le transformé quadratique de M' : la transformation ponctuelle du plan ainsi définie est réciproque.

Quand M est en un des points P, Q, R, par exemple en P, les polaires de M par rapport aux coniques Γ sont confondues suivant

(1) Plus habituellement, on entend par *transformation quadratique* toute transformation ponctuelle birationnelle qui fait correspondre à une droite quelconque une conique et, d'une manière générale, à une courbe algébrique quelconque de degré n une courbe algébrique de degré $2n$.

la droite QR ; le point M' est indéterminé sur cette droite. Les points P, Q, R sont dits *points singuliers* de la transformation ; les droites QR, PR et PQ sont dites *lignes singulières* de la transformation.

Si le point M décrit une courbe S, le point M' décrit une courbe S' qui est dite *transformée de la courbe* S ; la transformation étant réciproque, la courbe S est la transformée de la courbe S'. Supposons que la courbe S passe par un point singulier, par P, par exemple ; quand M tend vers P, M' tend vers une position limite μ sur la droite QR, la droite $P\mu$ étant conjuguée harmonique de la tangente en P à la courbe S par rapport aux deux côtés du quadrangle ABCD qui se rencontrent en P.

Théorèmes. — 1° *La transformée d'une droite quelconque es une conique circonscrite au triangle* PQR.

Ce théorème a été établi au chapitre précédent, mais il y est énoncé sous une autre forme. La conique coïncide avec le lieu des pôles de la droite par rapport aux coniques Γ.

Quand la droite passe par un point singulier, P, par exemple, la transformée se décompose en la droite QR et une autre droite, conjuguée harmonique de la droite donnée par rapport aux deux droites PAB et PCD.

2° *Réciproquement, la transformée d'une conique circonscrite au triangle* PQR *est une droite.*

Soient en effet M_1 et M_2 deux points de cette conique, M'_1 et M'_2 leurs transformés. D'après le premier théorème, la droite $M'_1M'_2$ a pour transformée une conique circonscrite au triangle PQR et passant par M_1 et M_2 ; cette conique, ayant cinq points communs avec la conique donnée, coïncide avec elle. La transformation étant réciproque, la conique donnée a pour transformée la droite $M'_1M'_2$.

La tangente en P à la conique transformée d'une droite est conjuguée harmonique par rapport aux droites PAB et PCD de la droite qui joint le point P au point d'intersection de la droite donnée avec la droite QR.

Théorèmes. — 1° *La transformée d'une conique qui ne passe par aucun des points* P, Q, R *est une courbe du quatrième degré admettant les points* P, Q, R *comme points doubles.*

Cherchons en combien de points une droite Δ rencontre la

transformée S' de la conique S. Comme la conique S ne passe par aucun des points P, Q, R, elle est rencontrée par la conique Δ' transformée de la droite Δ en quatre points autres que P, Q, R. La droite Δ rencontre la courbe S' en quatre points qui sont les transformés de ces quatre points; la courbe S' est ainsi une courbe du quatrième degré.

Quand le point M variable sur la conique S tend vers un point d'intersection α de cette conique avec la droite QR, son transformé M' tend vers P en décrivant une branche de la courbe S' qui passe par P et admet comme tangente en P la droite conjuguée harmonique de la droite $P\alpha$ par rapport aux droites PAB et PCD. Comme la conique S rencontre QR en deux points, la courbe S' admet deux branches qui passent par P. Les points singuliers P, Q, R sont des points doubles de la quartique S.

2° *Réciproquement, la transformée d'une courbe du quatrième degré admettant les points* P, Q, R *comme points doubles est une conique ne passant par aucun des points* P, Q, R.

En effet, coupons la transformée S de la quartique S' par une droite arbitraire Δ. Cette droite a pour transformée une conique Δ' passant par P, Q, R. Les points d'intersection de S et de Δ ont pour transformés les points d'intersection autres que P, Q, R de S' et de Δ'. Or, les courbes S' et Δ' se rencontrent en huit points dont six sont confondus avec P, Q, R; il existe donc deux points variables d'intersection de S' et de Δ' et par suite deux points d'intersection de S et de Δ; la courbe S est une conique. Cette conique ne passe par aucun des points P, Q, R; sinon, sa transformée S' serait une courbe algébrique de degré inférieur à 4.

Cas particuliers. — 1° Supposons que la conique S admette le triangle PQR comme triangle conjugué. La droite $P\alpha$ est alors tangente en α à la conique S. Une droite variable δ passant par P rencontre S en deux points M_1 et M_2 qui tendent simultanément vers α quand δ tend vers la droite $P\alpha$. Les points M'_1 et M'_2 transformés de M_1 et de M_2 sont situés sur une droite variable δ' passant par P et conjuguée harmonique de δ par rapport aux droites PAB et PCD; ces points tendent simultanément vers P, et la droite δ' tend vers la droite conjuguée harmonique de $P\alpha$ par rapport aux droites PAB et PCD. Cette droite δ' rencontre la branche de la courbe S' que décrivent M'_1 et M'_2 en trois points confondus avec le point P; c'est une tangente d'inflexion. On a ainsi le théorème suivant :

La transformée d'une conique admettant le triangle PQR *comme*

triangle conjugué est une courbe du quatrième degré qui admet les points P, Q, R *comme points doubles d'inflexion.*

Ce théorème s'applique, en particulier, aux coniques Γ proprement dites. Remarquons que chacun des points A, B, C, D coïncide avec son transformé ; la quartique transformée d'une conique Γ passe par les quatre points A, B, C, D.

Ce théorème admet une réciproque.

2° Supposons que la conique S soit inscrite au triangle PQR. Le point P est encore un point double de la quartique transformée S′ ; mais, les deux points d'intersection de la conique S avec la droite QR étant confondus, les tangentes à S′ en P sont elles-mêmes confondues. On a ainsi le théorème suivant :

La transformée d'une conique inscrite au triangle PQR *est une courbe du quatrième degré admettant les points* P, Q, R *comme points de rebroussement.*

Ce théorème admet une réciproque.

Théorème. — *La transformée d'une conique* S *qui passe par un des points* P, Q, R, *par exemple* P, *est une cubique admettant le point* P *comme point double.*

Un raisonnement analogue à celui qui a été employé pour établir les théorèmes précédents montre qu'une droite quelconque rencontre la courbe S′ transformée de S en trois points.

Ce théorème admet une réciproque.

Théorème. — *La transformée d'une conique* S *qui passe par deux des points* P, Q, R, *par exemple* P *et* Q, *est une conique passant par ces deux points.*

Un raisonnement analogue aux précédents montre qu'une droite quelconque rencontre la courbe S′ transformée de S en deux points. D'autre part, si un point M varie sur S en tendant vers le point d'intersection autre que Q de la conique S avec la droite QR, son transformé M′ tend vers P en décrivant une branche de la conique S′ qui passe par P.

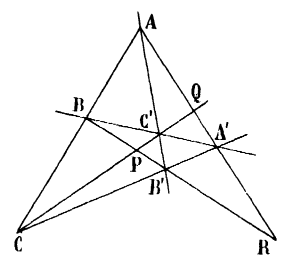
Par un raisonnement analogue aux précédents, on établit le théorème général suivant :

Une courbe algébrique de degré n admettant les points P, Q, R *respectivement comme points multiples d'ordres p, q, r a pour trans-*

formée une courbe algébrique de degré $2n-(p+q+r)$ *admettant les points* P, Q, R *respectivement comme points multiples d'ordre* $n-(q+r)$, $n-(p+r)$, $n-(p+q)$.

Pour rendre cet énoncé valable dans tous les cas, il convient de regarder une courbe algébrique qui ne passe pas par un des points P, Q, R comme une courbe qui admet ce point comme point multiple d'ordre o.

2. Corrélativement, soit un faisceau linéaire tangentiel de coniques Γ ayant quatre tangentes communes distinctes. Ces quatre droites sont les côtés d'un quadrilatère complet ; désignons par A, B, C trois sommets de ce quadrilatère situés sur un même côté et par A′, B′, C′ les sommets de ce quadrilatère respectivement opposés à A, B, C ; soient P, Q, R les points d'intersection des diagonales BB′ et CC′, CC′ et AA′, AA′ et BB′. Parmi les coniques du faisceau linéaire tangentiel, il en existe trois qui sont décomposées en deux sommets opposés du quadrilatère ; le triangle PQR est conjugué par rapport à chacune des coniques Γ.



Les pôles par rapport à ces coniques d'une droite Δ sont situés sur une même droite Δ′ qui passe par les conjugués harmoniques des points d'intersection de Δ avec les diagonales AA′, BB′, CC′, respectivement par rapport aux points A et A′, B et B′, C et C′. Cette droite Δ′ sera dite *transformée quadratique* de Δ. Comme les pôles de Δ′ par rapport aux coniques Γ sont situés sur Δ, Δ est la transformée quadratique de Δ′ : la transformation tangentielle du plan ainsi définie est réciproque.

Quand Δ coïncide avec une des droites AA′, BB′, CC′, côtés du triangle PQR, les pôles de Δ sont confondus avec le sommet opposé de ce triangle ; la droite Δ′ est une droite indéterminée passant par ce point. Les côtés du triangle PQR sont dits *droites singulières* de la transformation ; les sommets P, Q, R de ce triangle sont dits *enveloppes singulières* de la transformation.

Si la droite Δ enveloppe une courbe S, la droite Δ′ enveloppe une courbe S′ qui est dite *transformée de* S ; la transformation étant réciproque, la courbe S est la transformée de S′. Supposons que S soit tangente à une droite singulière, QR par exemple ; quand Δ

tend vers QR, Δ' tend vers une position limite δ passant par P, le point d'intersection de δ avec QR étant conjugué harmonique du point de contact de QR avec S par rapport aux deux points A et A'.

On a les théorèmes suivants qui se déduisent des théorèmes établis relativement à la transformation quadratique ponctuelle par simple application du principe de dualité et qu'il nous suffira d'énoncer :

1° *La transformée d'une enveloppe réduite à un point est une conique inscrite au triangle* PQR. *Elle coïncide avec l'enveloppe des polaires de ce point par rapport aux coniques* Γ.

Quand le point donné est situé sur un des côtés du triangle PQR, QR par exemple, la conique se décompose en le point P et un autre point conjugué harmonique du point donné par rapport aux points A et A'.

2° *Réciproquement, la transformée d'une conique inscrite au triangle* PQR *est un point.*

3° *La transformée d'une conique* S *qui n'est tangente à aucun des côtés du triangle* PQR *est une courbe de la quatrième classe qui admet les trois côtés de ce triangle comme tangentes doubles, et réciproquement.*

Les points de contact de la tangente double QR sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et A' des points de rencontre avec QR des tangentes à la conique S qui passent par P.

Si la conique S *admet le triangle* PQR *comme triangle conjugué, la transformée* S' *admet les trois côtés de ce triangle comme tangentes doubles de rebroussement, et réciproquement.*

Ce théorème s'applique en particulier aux coniques Γ du faisceau linéaire tangentiel donné.

Si la conique S *est circonscrite au triangle* PQR, *sa transformée admet les trois côtés de ce triangle comme tangentes d'inflexion, et réciproquement.*

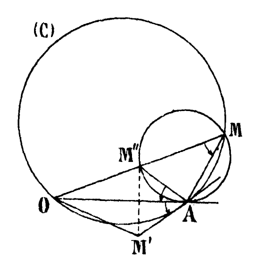
4° *La transformée d'une conique qui est tangente à un des côtés du triangle* PQR *est une courbe de la troisième classe qui admet ce côté comme tangente double, et réciproquement.*

5° *La transformée d'une conique tangente à deux des côtés du triangle* PQR *est une conique tangente aussi à ces deux droites.*

3. Applications. — 1° Soient deux hyperboles équilatères concentriques. Si O est leur centre commun et si I et J sont les points cycliques, le triangle OIJ est le triangle conjugué commun à ces deux coniques. Considérons le faisceau linéaire ponctuel des coniques Γ qui contient les deux hyperboles données. Le triangle OIJ étant conjugué par rapport à chacune de ces coniques, il s'ensuit que chaque conique Γ est une hyperbole équilatère de centre O.

La transformation d'un point M du plan en le point M′ commun aux polaires de M par rapport aux coniques Γ a des propriétés particulières qui la rattachent à l'inversion.

Les sécantes D et D′ qui passent par O et qui sont communes aux coniques Γ sont rectangulaires ; une de ces droites, soit D, rencontre les coniques Γ en deux points réels ; soit A un de ces deux points ; il se transforme en lui-même. Les droites OM et OM′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites D et D′ et par suite symétriques par rapport à D. D'autre part, la transformée d'une droite Δ est un cercle passant par O ; la tangente à ce cercle en O est symétrique par rapport à D de la parallèle menée par O à la droite Δ ; réciproquement, la transformée d'un cercle passant par O est une droite parallèle à la symétrique par rapport à D de la tangente en O au cercle.



Cela posé, M étant un point quelconque du plan, considérons le cercle qui passe par les points O, A, M ; il a pour courbe transformée une droite passant par A, qui, étant parallèle à la symétrique de la tangente en O par rapport à OA, coïncide avec la tangente en A au cercle. Soit M″ le symétrique de M′ par rapport à OA ; c'est un point de la droite OM. Or, on a les relations angulaires suivantes :

$$(AM'', OA) = (OA, AM') = (OM, MA),$$

et il en résulte que le cercle AMM″ est tangent en A à la droite OA. Par suite, on a

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM''} = \overline{OA}^2 = \text{const.}$$

La transformation de M en M″ est une inversion de pôle O ; *la transformation de* M *en* M′ *est le produit d'une inversion de pôle* O *et d'une symétrie par rapport à une droite passant par* O.

Voici des applications.

α. Soit une conique S autre qu'un cercle et supposons que cette conique ne passe pas par O. La transformation précédente la transforme en une quartique S′ qui admet le point O et les points cycliques I et J comme points doubles. Comme cette transformation est le produit d'une inversion de pôle O et d'une symétrie par rapport à une droite passant par O, on a le théorème suivant :

L'inverse d'une conique, autre qu'un cercle, dans une inversion qui a pour pôle un point O *non situé sur la conique est une quartique bicirculaire admettant le point* O *comme point double, les tangentes en ce point étant parallèles aux directions asymptotiques de la conique.*

Ce théorème admet une réciproque :

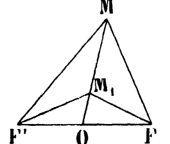
L'inverse d'une quartique bicirculaire qui admet un point double O *à distance finie, dans une inversion qui a pour pôle le point* O, *est une conique, autre qu'un cercle, qui ne passe pas par* O *et dont les directions asymptotiques sont les directions des tangentes en* O *à la quartique.*

En effet, considérons un faisceau linéaire ponctuel d'hyperboles équilatères Γ admettant le triangle OIJ comme triangle conjugué commun, et la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau de coniques. La transformée de la quartique est, d'après un théorème antérieur (§ 1), une conique S ne passant par aucun des points O, I, J. Comme la transformation quadratique considérée est le produit d'une inversion de pôle O et d'une symétrie par rapport à une droite D passant par O, la quartique est l'inverse, dans une inversion de pôle O, de la courbe symétrique de S par rapport à D, qui est aussi une conique ne passant par aucun des points O, I, J.

En particulier, soit une conique S admettant le triangle OIJ comme triangle conjugué ; c'est une hyperbole équilatère de centre O. La transformation précédente transforme cette hyperbole en une quartique S′ qui admet le point O et les points cycliques I et J comme points doubles d'inflexion. Le point O est centre de cette courbe, car si deux points M sont symétriques par rapport à O, il en est de même de leurs transformés M′. Les tangentes en O à la quartique S′ sont conjuguées harmoniques respectivement des directions asymptotiques de S par rapport aux deux droites rectangulaires D et D′ ; il s'ensuit que les tangentes en O à S′ sont rectangulaires. On a ainsi le théorème suivant :

L'inverse d'une hyperbole équilatère dans une inversion ayant pour pôle le centre O de l'hyperbole est une quartique admettant les points cycliques comme points doubles d'inflexion, le point O comme centre et comme point double d'inflexion, les tangentes en ce point étant rectangulaires et étant d'ailleurs les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

F et F' étant les foyers réels de l'hyperbole équilatère, prenons comme puissance d'inversion $\overline{OF}^2$ ou $\overline{OF'}^2$. Soit M_1 l'inverse du point M de l'hyperbole. On a



$$M_1F = MF \cdot \frac{OF}{OM}, \qquad M_1F' = MF' \cdot \frac{OF'}{OM},$$

d'où $$M_1F \,.\, M_1F' = \overline{OF}^2 \,.\, \frac{MF \,.\, MF'}{\overline{OM}^2}.$$

Or, on a, d'après la définition élémentaire de l'hyperbole,

$$|MF - MF'| = \text{const.} = OF\sqrt{2},$$

d'où $$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 2MF \,.\, MF' = 2\overline{OF}^2,$$

et d'autre part, d'après le théorème de la médiane,

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{OF}^2.$$

On en déduit $$MF \,.\, MF' = \overline{OM}^2.$$

et par suite $$M_1F \,.\, M_1F' = \overline{OF}^2.$$

Si l'on change la puissance d'inversion, l'inverse de la conique est remplacée par une courbe homothétique du lieu de M_1 par rapport à O. On obtient ainsi le théorème suivant :

L'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une courbe lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant et égal au carré de la demi-distance de ces deux points fixes.

Une telle courbe est dite *lemniscate de Bernoulli*, et l'on a le théorème suivant :

La lemniscate de Bernoulli est une quartique bicirculaire qui admet les points cycliques comme points doubles d'inflexion, qui a un troisième point double à distance finie centre de la courbe, nécessairement

point double d'inflexion, les tangentes en ce point étant rectangulaires (¹).

Soit inversement une quartique bicirculaire admettant un point double O à distance finie, centre de la courbe et à tangentes rectangulaires. Considérons un faisceau linéaire ponctuel d'hyperboles équilatères Γ admettant le triangle OIJ comme triangle conjugué commun, et la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau de coniques. La transformée de la quartique est une conique qui admet le triangle OIJ comme triangle conjugué ; c'est donc une hyperbole équilatère de centre O. Il s'ensuit que la quartique est l'inverse, dans une inversion de pôle O, d'une hyperbole équilatère de centre O, symétrique de l'hyperbole équilatère précédente par rapport à une certaine droite passant par O ; autrement dit, la quartique est une lemniscate de Bernoulli.

Soit une conique S admettant pour foyer le point O ; cette conique est tangente aux deux droites OI et OJ ; par suite, elle a pour transformée une quartique S′ admettant le point O comme point double et les points cycliques I et J comme points de rebroussement. On a ainsi le théorème suivant :

L'inverse d'une conique dans une inversion ayant pour pôle un foyer O de la conique est une quartique qui admet les points cycliques comme points de rebroussement et qui admet aussi le point O comme point double, les tangentes en ce point étant d'ailleurs parallèles aux directions asymptotiques de la conique.

Soit inversement une quartique bicirculaire admettant les points cycliques comme points de rebroussement et un point double O à distance finie. Considérons un faisceau linéaire ponctuel d'hyperboles équilatères Γ admettant le triangle OIJ comme triangle conjugué commun, et la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau de coniques. La transformée de la quartique est, d'après un théorème antérieur, une conique tangente aux côtés OI et OJ du triangle OIJ, c'est-à-dire admettant le point O comme foyer. Il s'ensuit que la quartique est l'inverse, dans une inversion de pôle O, d'une conique de foyer O, symétrique de la conique précédente par rapport à une certaine droite passant par O.

(¹) On appelle *ovale de Cassini* le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes F et F′ est constant. La lemniscate est l'ovale de Cassini qui passe par le milieu O du segment FF′, ce point étant nécessairement un point double de la courbe.

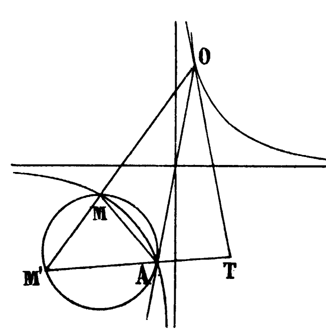
β. Considérons un faisceau linéaire ponctuel d'hyperboles équilatères de même centre O et la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau de coniques. Soit une conique S, autre qu'un cercle, passant par O. La transformation considérée la transforme en une cubique S′ passant par les points cycliques et admettant le point O comme point double. Il s'ensuit que l'on a le théorème suivant :

L'inverse d'une conique, autre qu'un cercle, dans une inversion qui a pour pôle un point O de la conique est une cubique circulaire admettant le point O comme point double, les tangentes en ce point étant parallèles aux directions asymptotiques de la conique.

Ce théorème admet une réciproque :

L'inverse d'une cubique circulaire à point double, dans une inversion qui a pour pôle le point double, est une conique qui passe par le point double et dont les directions asymptotiques sont les directions des tangentes au point double.

En particulier, l'inverse d'une parabole, dans une inversion qui a pour pôle un point de la parabole, est une cubique circulaire ayant le pôle d'inversion comme point de rebroussement. Une telle cubique est dite une *cissoïde*.



L'inverse d'une hyperbole équilatère, dans une inversion qui a pour pôle un point de l'hyperbole, est une cubique circulaire ayant le pôle d'inversion comme point double à tangentes rectangulaires. Une telle cubique est dite une *strophoïde*. Soit A le point diamétralement opposé au point O sur l'hyperbole. Prenons pour puissance d'inversion $\overline{OA}^2$. M étant un point de l'hyperbole, son inverse M′ est à l'intersection de la droite OM et du cercle tangent en A à la droite OA et passant par M. La droite OA et la tangente OT en O à l'hyperbole, de même que les droites MO et MA, font des angles opposés avec une asymptote ; donc, on a

$$(AM, AO) = (OT, OM).$$

D'autre part, on a

$$(AM, AO) = (M'M, M'A).$$

On a donc

$$(M'M, M'A) = (OT, OM),$$

ce qui prouve que, si T est le point d'intersection de la tangente en O à l'hyperbole et de la droite M'A, on a TM' = TO. On retrouve ainsi la définition élémentaire de la strophoïde.

γ. Soient deux courbes S et S_1 polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à un cercle ω de centre O. Il est immédiat que l'inverse de l'une de ces courbes dans une inversion qui a pour pôle O et pour puissance le carré du rayon du cercle ω, coïncide avec la podaire de l'autre par rapport au point O. Or, si l'une des deux courbes est une conique qui ne passe pas par O, l'autre est une conique autre qu'une parabole ; si l'une des courbes est une conique qui passe par O, l'autre est une parabole. On a par suite les théorèmes suivants :

1° *La podaire d'une conique à centre par rapport à un point O est une quartique bicirculaire admettant le point O comme point double, les tangentes en ce point étant perpendiculaires aux tangentes menées de ce point à la conique.*

2° *La podaire d'une parabole par rapport à un point O est une cubique circulaire admettant le point O comme point double, les tangentes en ce point étant perpendiculaires aux tangentes menées de ce point à la conique.*

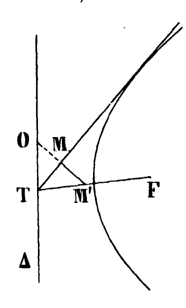
Ces deux théorèmes admettent des réciproques.

En particulier, une hyperbole équilatère se transformant en elle même par polaires réciproques par rapport au cercle concentrique qui passe par ses sommets réels, on voit que *la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate qui a pour point double réel le centre de l'hyperbole, les tangentes en ce point étant les asymptotes de l'hyperbole.*

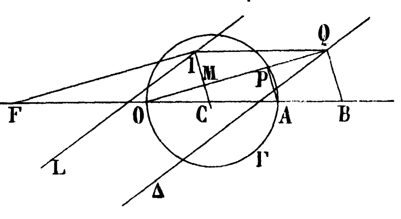
Une conique de foyer O se transformant en un cercle par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O, on voit aussi que *la podaire d'un cercle par rapport à un point O est une quartique admettant les points cycliques comme points de rebroussement, le point O comme point double, les tangentes en ce point O étant perpendiculaires aux tangentes menées de O au cercle.* Une telle quartique est dite un *limaçon de Pascal.* Quand le point O est situé sur le cercle, la quartique admet le point O comme point de rebroussement ; elle

est dite alors une *cardioïde. L'inverse d'une parabole dans une inversion qui a pour pôle le foyer de la parabole est une cardioïde qui admet le foyer de la parabole comme point de rebroussement à distance finie.*

Enfin, considérons une parabole. La podaire de cette parabole par rapport à un point O de sa directrice est une cubique circulaire qui admet le point O comme point double, les tangentes en ce point étant rectangulaires et coïncidant avec les tangentes menées de O à la parabole ; *cette cubique est donc une strophoïde.* Soit T le point d'intersection d'une tangente à la parabole et de la directrice Δ. La droite symétrique de Δ par rapport à la tangente à la parabole passe par le foyer F, et cette droite contient l'homothétique M′, dans l'homothétie de pôle O et de rapport 2, du pied M de la perpendiculaire menée de O sur la tangente à la parabole. Le lieu de M′ est aussi une strophoïde. Or, on a $TM' = TO$; on retrouve encore ainsi la définition élémentaire de la strophoïde.



5. Soient un cercle Γ et une droite Δ. Par un point fixe O de Γ menons une droite variable rencontrant le cercle en un point variable P et la droite en un point Q. Soit sur cette sécante le point M tel que l'on ait $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$. Nous allons montrer que *le lieu de M est une cubique circulaire admettant le point O comme point double.*



En effet, soit A le point diamétralement opposé au point O sur le cercle Γ ; la droite PA est perpendiculaire à la droite OP. Menons en M et Q les perpendiculaires à la droite OP, rencontrant OA respectivement aux points C et B ; on a évidemment

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \text{const.}$$

Menons par Q la parallèle à OA, rencontrant MC en I ; on a

$$\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{CB} = \text{const.}$$

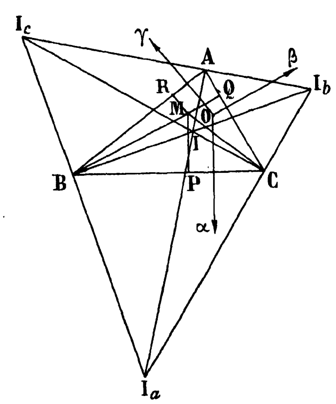
Le lieu de I est donc une droite L parallèle à Δ. D'autre part, menons en I la parallèle à OP, c'est-à-dire la perpendiculaire à MC, rencontrant OA en F. On a

$$\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{IQ} = \text{const.}$$

Donc le point F est fixe. La droite MC enveloppe la parabole qui a pour foyer F et pour tangente au sommet L ; le lieu de M est la podaire de cette parabole par rapport à O ; par suite, c'est une cubique circulaire ayant le point O comme point double. La droite Δ est l'asymptote réelle de la cubique.

Le point M coïncide avec O quand P coïncide avec un des points d'intersection de Γ et de Δ. Il s'ensuit que les tangentes en O sont les droites qui joignent le point O aux points d'intersection de Γ et de Δ. En particulier, si Δ est tangente à Γ, la cubique est une cissoïde, si Δ est un diamètre de Γ, la cubique est une strophoïde.

Toute cubique circulaire à point double étant la podaire d'une parabole par rapport à son point double, le raisonnement précédent repris en sens inverse prouve que toute cubique circulaire peut être engendrée par le procédé qui vient d'être défini.



2° Soient un triangle ABC, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle. Le quadrangle de sommets I, I_a, I_b, I_c est orthocentrique ; les coniques circonscrites à ce quadrangle sont des hyperboles équilatères Γ formant un faisceau linéaire ponctuel ; le triangle ABC est conjugué par rapport à chacune des coniques du faisceau.

Le faisceau définit une transformation quadratique ponctuelle. Le transformé M′ d'un point M du plan est le point d'intersection des droites AM′, BM′, CM′ symétriques respectivement des droites AM, BM, CM par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle donné.

Faisons choix d'un point fixe O intérieur au triangle ABC, abaissons de O les perpendiculaires sur les côtés du triangle et orientons

ces droites de manière que les demi-droites positives $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ issues de O, sur ces droites, contiennent respectivement les points de rencontre des droites avec les côtés du triangle. Les mesures algébriques x, y, z des vecteurs $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MR}$ comptées respectivement sur les axes $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ sont dites les *coordonnées trilinéaires normales* du point M par rapport au triangle ABC.

Si x', y', z' sont les coordonnées trilinéaires normales du point M′, il est facile de voir que l'on a les relations

$$xx' = yy' = zz'.$$

Les points M et M′ sont dits *inverses l'un de l'autre par rapport au triangle* ABC.

Dans la transformation quadratique par points inverses par rapport à un triangle, les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle se transforment en eux-mêmes, le point de concours des hauteurs du triangle et le centre du cercle circonscrit au triangle sont transformés l'un de l'autre.

D'après le théorème de Poncelet relatif aux tangentes menées d'un point à une conique et aux droites qui joignent ce point aux foyers réels de la conique, on voit que deux points inverses M et M′ sont foyers d'une même conique inscrite au triangle ABC. Quand un des foyers est à l'infini, la conique est une parabole, le foyer à distance finie est alors sur le cercle circonscrit au triangle ABC ; autrement dit, dans la transformation par points inverses, la droite à l'infini et le cercle circonscrit au triangle ABC sont des courbes transformées l'une de l'autre.

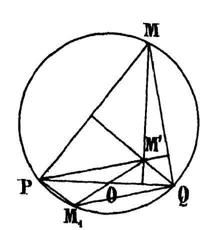
3° Soient les cercles Γ qui passent par deux points fixes A et B à distance finie ; ils forment un faisceau linéaire ponctuel. Parmi ces cercles, il en existe trois qui sont décomposés en deux droites ; l'un d'eux est formé de la droite AB, axe radical commun aux cercles Γ, et de la droite à l'infini ; les deux autres sont des cercles de rayon nul ayant pour centres P et Q situés sur la médiatrice de AB, ligne des centres des cercles Γ. Le triangle qui a pour sommets les points P et Q et le point à l'infini R sur la droite AB est conjugué par rapport à tous les cercles Γ.

Considérons la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen du faisceau des cercles Γ. Le transformé M′ d'un point M est le point de rencontre des perpendiculaires en P et Q respectivement aux droites MP et MQ ; c'est le point diamétralement opposé au point M sur le cercle qui passe par M, P, Q. Ainsi,

La transformation qui fait se correspondre deux points diamétralement

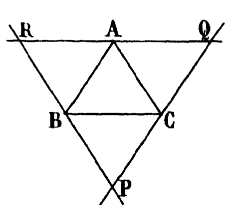
opposés sur un cercle variable qui passe par deux points fixes P *et* Q *est une transformation quadratique. Les points singuliers de la transformation sont les points* P *et* Q *et le point à l'infini* R *dans la direction des perpendiculaires à la droite* PQ.

Soient deux points fixes P et Q. M étant un point variable, considérons le point M′ de concours des hauteurs du triangle MPQ ; le point M est le point de concours des hauteurs du triangle M′PQ. Soit d'autre part le point M_1 diamétralement opposé au point M sur le cercle MPQ. Les points M′, P, Q et M_1 sont évidemment les sommets d'un parallélogramme et par suite les points M_1 et M′ sont symétriques par rapport au milieu O de PQ. On a ainsi le théorème suivant :



La transformation qui fait correspondre à un point M *le point* M′ *de concours des hauteurs du triangle qui a pour sommets deux points fixes* P *et* Q *du plan et le point* M *est le produit d'une transformation quadratique, qui a pour points singuliers les points* P *et* Q *et le point* R *à l'infini dans la direction des perpendiculaires à* PQ, *et d'une symétrie par rapport au milieu* O *de* PQ.

4° Soit un triangle ABC. Les trois côtés de ce triangle et la droite à l'infini sont les côtés d'un quadrilatère complet ; les points A, B, C sont trois des sommets de ce quadrilatère, les sommets opposés sont respectivement les points à l'infini A′, B′, C′ des droites BC, CA et AB. Il existe une infinité de coniques Γ inscrites à ce quadrilatère complet ; ce sont les paraboles qui sont inscrites au triangle donné ABC ; elles forment un faisceau linéaire tangentiel. Parmi ces coniques il en existe trois décomposées en deux points ; ce sont les couples de points A et A′, B et B′, C et C′. Le triangle PQR dont les côtés sont les parallèles menées par les sommets du triangle ABC respectivement aux côtés opposés est conjugué par rapport à chacune des coniques Γ.

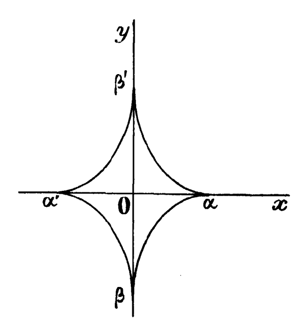


Considérons la transformation quadratique tangentielle définie au moyen du faisceau linéaire tangentiel des coniques Γ. La transformée D′ d'une droite D qui rencontre les côtés du triangle PQR aux points α, β, γ rencontre les côtés du triangle PQR aux points

α', β', γ' respectivement symétriques de α, β, γ par rapport aux milieux des côtés QR, RP et PQ du triangle PQR. D'après une dénomination due à G. de Longchamps, les droites D et D' sont des *transversales réciproques* du triangle PQR. *La transformation par transversales réciproques est une transformation quadratique tangentielle dont les droites singulières sont les côtés du triangle par rapport auquel les droites transformées sont transversales réciproques.*

5° Soient les coniques Γ qui admettent comme foyers deux points réels F et F' donnés à distance finie; ces coniques forment un faisceau linéaire tangentiel. Considérons la transformation quadratique tangentielle définie au moyen de ce faisceau. La transformée D' d'une droite D est la normale à la conique Γ tangente à D, dont le pied est le point de contact de Γ et de D.

Si la droite D varie en enveloppant une conique Γ, la droite D' reste toujours normale à cette conique au point de contact avec D; autrement dit, la transformée quadratique tangentielle de la conique Γ est la développée de cette conique. Il s'ensuit que *la développée d'une conique à centre est une courbe de la quatrième classe qui admet les axes de la conique et la droite à l'infini comme tangentes doubles de rebroussement.* Les axes de la conique sont axes de symétrie de cette courbe. Les points de rebroussement situés sur chacun des axes sont les conjugués harmoniques par rapport aux foyers situés sur l'axe des points d'intersection de l'axe avec la conique; les directions asymptotiques de la développée sont perpendiculaires aux directions asymptotiques de la conique.



Réciproquement, soit une courbe S de la quatrième classe, admettant comme tangentes doubles de rebroussement deux droites rectangulaires Ox et Oy et la droite à l'infini, les points de rebroussement à distance finie étant les sommets d'un losange (autre qu'un carré) de diagonales Ox et Oy. Montrons que cette courbe est la développée d'une conique à centre.

Supposons en effet que la distance des points de rebroussement α et α' situés sur Ox soit plus petite que la distance des points de rebroussement β et β' situés sur Oy. Cherchons une conique Γ ayant

pour axe focal Ox, pour axe non focal Oy, de façon que α et α' soient conjugués harmoniques des sommets A et A' situés sur Ox par rapport aux foyers réels F et F' situés sur Ox et que β et β' soient conjugués harmoniques des sommets B et B' situés sur Oy par rapport aux foyers imaginaires φ et φ' situés sur Oy. On doit avoir, en désignant par c la distance de O à chacun des points F et F',

$$OA = \frac{c^2}{O\alpha}, \qquad OB = \frac{c^2}{O\beta},$$

d'où, en élevant au carré et en retranchant,

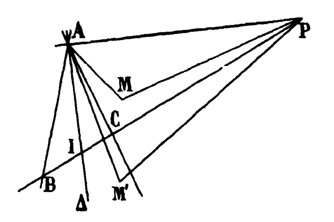
$$c^2 = c^4 \left(\frac{1}{\overline{O\alpha}^2} - \frac{1}{\overline{O\beta}^2} \right),$$

égalité qui détermine les foyers et les sommets de la conique Γ cherchée.

Considérons la développée S' de cette conique Γ ; c'est une courbe de la quatrième classe qui admet les droites Ox et Oy comme tangentes doubles de rebroussement, les points de contact étant les points α et α', β et β', et qui admet aussi comme tangente double de rebroussement la droite à l'infini. Or, quand deux courbes ont une tangente double commune, cette droite compte au moins pour quatre dans le nombre des tangentes communes aux deux courbes ; elle compte au moins pour six quand les deux points de contact avec les deux courbes sont les mêmes, et au moins pour huit quand ces deux mêmes points de contact sont de rebroussement. D'après cela, on voit que les deux courbes S et S' ont au moins $8 + 8 + 4$, c'est-à-dire 20 tangentes communes ; ce nombre étant supérieur au produit des classes des deux courbes, ces deux courbes sont confondues.

Par application de ce qui précède, proposons-nous de déterminer les normales à une conique à centre qui passent par un point donné P à distance finie. Le point P a, comme nous le savons, pour courbe transformée une parabole Π tangente aux axes de la conique Γ. Les quatre tangentes communes à cette parabole et à la conique Γ ont pour transformées les quatre normales cherchées. La parabole Π est tangente à la polaire de P par rapport à Γ. Elle a pour transformée par polaires réciproques par rapport à Γ une conique qui passe par le centre de Γ, les points à l'infini sur les axes de Γ, le point P et les pieds des quatre normales menées de P à Γ ; cette conique est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

4. Considérons deux coniques proprement dites, tangentes en un point A et se rencontrant en deux autres points distincts B et C. Il existe un faisceau linéaire ponctuel de coniques Γ qui contient ces deux coniques; les coniques Γ sont tangentes en A à chacune des deux coniques, à l'exception de la conique formée des droites AB et AC, qui admet le point A comme point double. Outre cette conique, le faisceau linéaire contient encore une conique décomposée, formée de la tangente en A aux coniques Γ et de la droite BC. Le point P d'intersection de ces deux droites a par rapport aux coniques Γ une même polaire Δ qui passe par A et par le conjugué harmonique I de P par rapport aux points B et C. Les polaires d'un point M quelconque du plan par rapport aux coniques Γ sont concourantes en un point M′, qui est, en particulier, le point de rencontre de la droite conjuguée harmonique de la droite AM par rapport aux droites AB et AC et de la droite conjuguée harmonique de la droite PM par rapport aux droites PA et PBC. Le point M′ sera dit encore *transformé quadratique de* M. La transformation ponctuelle ainsi définie est réciproque.



Quand M est en A, M′ est indéterminé sur la droite PA; quand M est en P, M′ est indéterminé sur la droite Δ. Les points A et P sont dits *points singuliers* de la transformation, la droite PA et la droite Δ sont dites *droites singulières* de la transformation.

On a les théorèmes suivants, qui se démontrent comme les théorèmes correspondants relatifs à la transformation quadratique ponctuelle définie au moyen d'un faisceau linéaire de coniques ayant quatre points communs distincts.

1° *La transformée d'une droite quelconque est une conique passant par* P *et* A, *et tangente en* A *à la droite* Δ.

2° *La transformée d'une conique qui ne passe ni par* A *ni par* P *est une quartique, unicursale comme la conique elle-même, qui admet seulement deux points doubles, le point* A *qui est de rebroussement, la tangente en* A *étant* Δ, *et le point* P, *où les tangentes sont les droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites* PA *et* PBC *des droites qui joignent le point* P *aux points d'intersection de la conique avec la droite* Δ.

Il n'existe pas de point de rencontre autre que A de la quartique avec la droite Δ ; le point A compte pour quatre dans l'intersection de la quartique et de la tangente en A.

3° *La transformée d'une conique qui passe par* A *sans y être tangente à* Δ *et ne passe pas par* P *est une cubique qui admet le point* A *comme point double et le point* P *comme point simple. L'une des tangentes en* A *est la droite* Δ ; *la tangente en* P *est conjuguée harmonique par rapport aux droites* PA *et* PBC *de la droite qui joint le point* P *au point de rencontre autre que* A *de la conique avec la droite* Δ.

Si la conique passe par A et y est tangente à la droite AP, le point A est un point de rebroussement de la cubique transformée, la tangente de rebroussement étant Δ. Si, en outre, la polaire de P par rapport à la conique est la droite Δ, le point P est d'inflexion. Ce double résultat s'applique en particulier à la transformée d'une conique Γ proprement dite.

4° *La transformée d'une conique qui passe par* P *et ne passe pas par* A *est une cubique qui admet* P *comme point double et qui est tangente en* A *à* Δ.

5° *La transformée d'une conique qui est tangente en* A *à* Δ *et ne passe pas par* P *est une conique tangente en* A *à* Δ *et ne passant pas par le point* P.

6° *La transformée d'une conique qui passe par* P *et qui passe par* A *sans y être tangente à* Δ *est une conique passant par* P *et* A.

7° *La transformée d'une conique passant par* P *et tangente en* A *à* Δ *est une droite.*

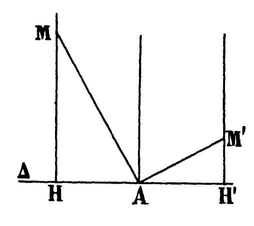
Corrélativement, considérons un faisceau linéaire tangentiel de coniques Γ tangentes en un même point A et tangentes à deux droites distinctes autres que leur tangente commune en A. A toute droite Δ du plan il correspond une droite Δ′ lieu des pôles de Δ par rapport aux coniques Γ ; cette droite Δ′ sera dite encore *transformée quadratique de* Δ ; la transformation tangentielle ainsi définie est réciproque.

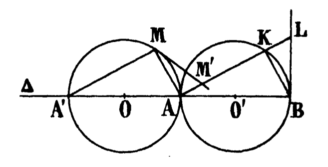
On a des théorèmes qui se déduisent des précédents par application du principe de dualité.

5. Applications. — 1° Soit un faisceau linéaire ponctuel de cercles Γ tangents en un point A. La transformation définie au moyen de ce faisceau fait correspondre à un point M du plan le point d'intersection M′ de la perpendiculaire en A à la droite AM

avec la droite symétrique par rapport à la tangente en A de la parallèle à cette tangente en A menée par le point M.

Supposons que M décrive un cercle Γ ; le point transformé M′ est le point d'intersection de la tangente au cercle Γ et de la perpendiculaire en A à AM. Le lieu de M′ est une cubique qui admet le point A comme point de rebroussement et le point à l'infini dans la direction de la tangente en A comme point d'inflexion. La tangente de rebroussement est la droite Δ, ligne des centres des cercles Γ ; l'asymptote d'inflexion est la droite symétrique par rapport à la tangente en A de la tangente au point A′ du cercle Γ qui est diamétralement opposé au point A. Enfin, les points cycliques, communs aux cercles Γ, coïncident avec leurs transformés quadratiques ; il s'ensuit que la cubique est circulaire.





Considérons le cercle de diamètre AB symétrique du cercle Γ par rapport à la tangente en A. La droite AM′ rencontre ce cercle en K et la tangente en B à ce cercle en L. Les droites A′M et AK sont parallèles ; les deux triangles A′MA et AKB se déduisent l'un de l'autre par translation ; donc, on a KB = AM. D'autre part, on a

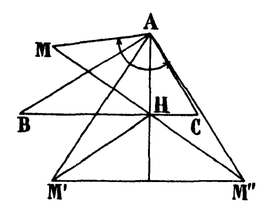
$$\widehat{KBL} = \widehat{LAB} = \widehat{MA'A} = \widehat{AMM'}.$$

Il s'ensuit que les deux triangles MAM′ et BKL sont égaux ; donc on a $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{KL}$, et on voit ainsi que le lieu de M′ est une *cissoïde droite,* telle qu'on la définit élémentairement.

2° Soit un faisceau linéaire tangentiel de paraboles Γ homofocales. La transformation quadratique tangentielle définie au moyen de ce faisceau fait correspondre à une droite Δ du plan la perpendiculaire Δ′ à Δ menée par le point de contact de Δ avec la parabole Γ qui lui est tangente. La transformée quadratique d'une parabole Γ est la développée de cette parabole. On voit d'après cela que *la développée d'une parabole est une courbe de la troisième classe admettant la droite à l'infini comme tangente d'inflexion, le point d'inflexion étant à l'infini dans la direction des perpendiculaires à l'axe de la parabole, et admettant l'axe de la parabole comme tangente de*

rebroussement, le point de rebroussement étant symétrique du sommet de la parabole par rapport au foyer. Cette courbe est du troisième degré.

3° Soient les hyperboles équilatères Γ circonscrites au triangle ABC rectangle en A. Elles sont tangentes en A à la hauteur AH et forment un faisceau linéaire ponctuel.



La transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau linéaire fait correspondre à un point M du plan le point M′ d'intersection de la droite symétrique de AM par rapport à AB ou à AC et de la droite symétrique de HM par rapport à AH ou à BC. Soit M″ le symétrique de M′ par rapport à AH; ce point est situé sur MH. Montrons que *l'angle* (AM, AM″) *est constant.* En effet, on a

$$(\mathrm{AM}, \mathrm{AM''}) = (\mathrm{AM}, \mathrm{AM'}) + (\mathrm{AM'}, \mathrm{AM''});$$

mais, on a

$$(\mathrm{AM}, \mathrm{AM'}) = 2(\mathrm{AB}, \mathrm{AM'}), \qquad (\mathrm{AM'}, \mathrm{AM''}) = 2(\mathrm{AM'}, \mathrm{AH});$$

donc, on a

$$(\mathrm{AM}, \mathrm{AM''}) = 2(\mathrm{AB}, \mathrm{AH}) = \text{const}.$$

Cette constante étant arbitraire, on a ainsi le théorème suivant :

Étant donné un segment de droite AH, *la transformation qui fait correspondre à un point* M *le point* M″ *situé sur la droite* HM *et tel que l'angle* (AM, AM″) *ait une valeur donnée est le produit d'une transformation quadratique et d'une symétrie par rapport à la droite* AH.

Le point H a la même polaire par rapport aux coniques Γ; cette droite passe par A et par le conjugué harmonique K de H par rapport aux points B et C; c'est donc la tangente en A au cercle de diamètre BC.

La transformation quadratique de M en M′ transforme une droite quelconque en une conique passant par H, par A et tangente en A à la droite AK; la transformation de M en M″ transforme donc une droite quelconque en une conique passant par H, par A et tangente en A à la symétrique de AK par rapport à AH, et réciproquement. La transformation de M en M′ transforme une conique

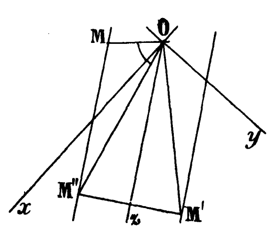
ne passant pas par H et tangente en A à AK en une conique ne passant pas par H et tangente en A à AK, et la transformation de M en M″ transforme une conique ne passant pas par H et tangente en A à AK en une conique ne passant pas par H et tangente en A à la symétrique de AK par rapport à AH.

La transformation de M en M′ transforme le point cyclique I en le point cyclique J ; la transformation de M′ en M″ transforme J en I ; donc la transformation de M en M″ transforme chaque point cyclique en lui-même. Un cercle S tangent en A à AK, ne passant pas par H, se transforme en un cercle S″ ne passant pas par H et tangent en A à la droite symétrique de AK par rapport à AH. D'autre part, la transformation de M en M″ transforme en elle-même une droite passant par H ; il s'ensuit que les tangentes menées de H au cercle S sont aussi tangentes au cercle S″ ; les cercles S et S″ ayant deux points réels communs, le point H, qui est réel, ne peut être qu'un centre d'homothétie des deux cercles. Quand le point M variable sur S tend vers A, le point M″ variable sur S″ tend vers le point α autre que A d'intersection de S″ avec la droite AH ; la tangente αT au cercle S″ est parallèle à la tangente AK au cercle S en A. On a

$$(M''\alpha, M''A) = (\alpha T, \alpha A) = (AK, AH) = (MA, M''A);$$

donc les droites AM et αM″ sont parallèles, et les deux points M et M″ sont homologues sur les cercles S et S″ ; les tangentes en M et M″ à ces deux cercles sont parallèles.

La transformation de M en M″ transforme une conique qui passe par A et H et qui n'est pas tangente en A à AK en une conique passant par A et H ; si la conique est un cercle, sa transformée est un cercle.



4° Soient un angle droit xOy et une droite Oz. Considérons les hyperboles équilatères Γ qui passent par O, y sont tangentes à Oz et admettent les directions de Ox et de Oy comme directions asymptotiques. Ces coniques forment un faisceau linéaire ponctuel.

La transformation quadratique ponctuelle définie au moyen de ce faisceau linéaire fait correspondre à un point M du plan le point M′ d'intersection de la droite symétrique de la droite OM par rapport à Ox ou à Oy et de la droite symétrique par rapport à Oz de la parallèle à Oz menée par M. Soit M″ le symétrique de M′ par

rapport à Oz. Montrons que *l'angle* (OM, OM'') *est constant.* En effet, on a

$$(OM, OM'') = (OM, OM') + (OM', OM'')$$
$$= 2(Ox, OM') + 2(OM', Oz) = 2(Ox, Oz) = \text{const.}$$

Cette constante étant arbitraire, on a ainsi le théorème suivant :

Étant donnée une droite Oz, *la transformation qui fait correspondre à un point* M *le point* M″ *situé sur la parallèle à* Oz *menée par* M *et tel que l'angle* (OM, OM'') *ait une valeur donnée est le produit d'une transformation quadratique et d'une symétrie par rapport à* Oz.

Le diamètre conjugué de la direction de Oz par rapport aux coniques Γ est la droite Δ symétrique de Oz par rapport à Ox et à Oy. La transformation de M en M″ transforme une conique tangente en O à Δ, qui n'admet pas Oz comme direction asymptotique, en une conique tangente en O à la droite symétrique de Δ par rapport à Oz; en particulier, si la conique est un cercle, sa transformée est aussi un cercle, qui se déduit du premier par translation ; les points M et M″ correspondants sur les deux cercles sont tels que les tangentes en ces points soient parallèles.

6. Considérons un faisceau linéaire ponctuel de coniques Γ osculatrices en un point A et se rencontrant en un point B. On peut encore faire correspondre à un point M quelconque le point M′ commun aux polaires de M par rapport aux coniques Γ ; le point M′ est encore dit *transformé quadratique de* M ; la transformation est réciproque. Il n'existe plus qu'un point singulier qui est le point A et une seule droite singulière qui est la tangente en A aux coniques Γ.

Notons le résultat suivant : *dans la transformation précédente, la transformée d'une conique quelconque qui ne passe pas par* A *est une courbe unicursale du quatrième degré qui n'a pas d'autres points multiples que le point double* A.

7. Soient un triangle PQR et une conique fixe U, proprement dite, ou bien décomposée en deux droites distinctes ou confondues. Δ étant une droite variable du plan, il existe une conique S circonscrite au triangle PQR et passant par les points d'intersection A et B de la droite Δ et de la conique U. Cette conique rencontre la conique U en deux autres points A′ et B′; soit Δ′ la droite qui passe par ces deux points, tangente à la conique U si les deux points sont confondus. Nous allons montrer que *la transformation évidem-*

ment réciproque qui fait se correspondre les droites Δ *et* Δ' *est une transformation quadratique tangentielle.*

En effet, soient p et p', q et q', r et r' les points d'intersection de la conique U respectivement avec les droites QR, RP et PQ, et, d'autre part, soient α et α' les points doubles de l'involution qui contient les deux couples de points p, p' et Q, R, β et β' les points doubles de l'involution qui contient les deux couples de points q, q' et R, P, γ et γ' les points doubles de l'involution qui contient les deux couples de points r, r' et P, Q. Les droites D et D', qui forment une conique faisant partie du faisceau linéaire ponctuel qui contient les coniques U et S, rencontrent la droite QR en deux points qui, d'après le théorème de Desargues, sont conjugués harmoniques par rapport aux points α et α'. De même, elles rencontrent la droite RP en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points β et β', et la droite PQ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points γ et γ'. Il s'ensuit que la transformation de Δ en Δ' est la transformation quadratique tangentielle définie au moyen du faisceau linéaire tangentiel qui contient la conique décomposée en les points α et α', la conique décomposée en les points β et β', et, par le fait même, la conique décomposée en les points γ et γ'. Les côtés du triangle PQR sont les droites singulières de la transformation.

Par transformation par polaires réciproques par rapport à U, on voit que la transformation réciproque qui fait se correspondre les pôles M et M' des droites Δ et Δ' par rapport à U est une transformation quadratique définie au moyen du faisceau linéaire ponctuel de coniques transformé par polaires réciproques par rapport à U du faisceau linéaire tangentiel précédent. Les points singuliers de cette transformation quadratique ponctuelle sont les pôles des côtés du triangle PQR par rapport à la conique U.

Des propriétés de la transformation quadratique tangentielle qui ont été établies, il résulte le théorème suivant :

Soit une conique variable circonscrite à un triangle fixe PQR *et tangente à une conique fixe* U. A *et* B *étant les points d'intersection, autres que le point de contact, de la conique variable et de la conique fixe, la droite* AB *a pour enveloppe une courbe de la quatrième classe qui admet les côtés du triangle* PQR *comme tangentes doubles.*

Si, en particulier, le triangle PQR est conjugué par rapport à la conique U, la courbe de la quatrième classe admet les côtés du triangle PQR comme tangentes doubles de rebroussement ; les points de rebroussement sont les points de rencontre de la conique avec les côtés du triangle PQR.

Corrélativement, soient un triangle fixe PQR et une conique fixe U, proprement dite ou bien décomposée en deux points distincts ou confondus. M étant un point arbitraire du plan, il existe une conique S inscrite au triangle PQR et tangente aux deux tangentes menées du point M à la conique U. Les deux coniques admettent deux autres tangentes communes qui se coupent en un point M′, situé sur U si ces deux tangentes sont confondues; *la transformation évidemment réciproque qui fait se correspondre les points* M *et* M′ *est une transformation quadratique dont les points singuliers sont les points* P, Q, R. *La transformation réciproque qui fait se correspondre les polaires* Δ *et* Δ′ *de* M *et de* M′ *par rapport à* U *est une transformation quadratique dont les droites singulières sont les polaires des points* P, Q, R *par rapport à* U.

On a le théorème suivant :

Soit une conique variable inscrite à un triangle fixe PQR *et tangente à une conique fixe* U. *Le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux coniques, autres que la tangente en leur point de contact, est une courbe du quatrième degré qui admet les sommets du triangle* PQR *comme points doubles.*

Si, en particulier, le triangle PQR est conjugué par rapport à la conique U, la courbe du quatrième degré admet les points P, Q, R comme points doubles d'inflexion ; les tangentes d'inflexion sont les tangentes menées à la conique U par les points P, Q, R.

8. Applications. — 1° Soit une conique U à centre. Une droite arbitraire Δ la rencontrant en deux points A et B, menons les normales à U en A et B, qui se coupent en un point P, dit *pôle normal* de Δ par rapport à U. De P, on peut mener à U deux autres normales ayant leurs pieds en A′ et B′ ; soit Δ′ la droite qui joint ces deux points. *La transformation réciproque qui fait se correspondre* Δ *et* Δ′ *est quadratique.* En effet, les quatre points A, B, A′, B′ sont les points d'intersection de la conique U avec une hyperbole circonscrite au triangle qui a pour côtés les axes de la conique et la droite à l'infini. Ce triangle est conjugué par rapport à U.

On a le théorème suivant :

D'un point variable de la développée d'une conique à centre, on mène les deux normales à la conique autres que la tangente en ce point à la développée. La droite qui joint leurs pieds sur la conique enveloppe une courbe de la quatrième classe qui admet les axes de la conique et la droite à l'infini comme tangentes doubles de rebroussement, les points

de rebroussement étant les quatre sommets de la conique et ses deux points à l'infini.

On peut encore dire que *cette droite est normale à une conique fixe ayant pour axes les axes de la conique donnée.*

Soient M et M′ les pôles de Δ et de Δ′ par rapport à U. La transformation réciproque qui fait se correspondre les points M et M′ est une transformation quadratique ponctuelle dont les points singuliers sont le centre de la conique U et les points à l'infini sur les axes de la conique U. Les projections des deux points M et M′ sur un axe de la conique U forment un couple de l'involution qui contient le couple des extrémités de l'axe de U et le couple formé du centre de U et du point à l'infini sur l'axe. D'après cela, si x et y sont les coordonnées de M, x' et y' celles de M′ par rapport aux axes de U, on a

$$xx' = -a^2, \qquad yy' = -b^2,$$

a et b étant les demi-longueurs des axes de la conique U.

2° Soit une hyperbole équilatère fixe U, de centre O. Une parabole variable ayant pour foyer le point O et tangente à l'hyperbole équilatère admet avec cette conique deux tangentes communes autres que la tangente en leur point de contact. Comme cette parabole est inscrite au triangle qui a pour sommets le point O et les deux points cycliques I et J, lequel triangle est conjugué par rapport à U, le lieu du point M d'intersection des tangentes communes à l'hyperbole et à la parabole autres que la tangente en leur point de contact est une courbe du quatrième degré qui admet les points O, I, J comme points doubles d'inflexion, les tangentes en O, qui sont les asymptotes de l'hyperbole, étant rectangulaires. *Cette quartique est donc une lemniscate de Bernoulli.*

3° Soit une conique variable inscrite à un triangle fixe PQR dont les sommets sont à distance finie. La transformation qui fait se correspondre les asymptotes d'une telle conique est une transformation quadratique tangentielle dont les droites singulières sont les côtés du triangle PQR. Pour le voir, il suffit de prendre comme conique U la conique décomposée en deux droites confondues avec la droite à l'infini.

9. Remarques. — Conservant, dans ce qui précède, la conique U, on peut encore définir une transformation quadratique tangentielle en considérant un couple de sécantes communes variables à la conique U et à une conique S variable passant par un point fixe

P et tangente à une droite fixe en un point Q, et aussi en considérant un couple de sécantes communes variables à la conique U et à une conique osculatrice à une conique donnée en un point donné. De même, on pourra définir une transformation quadratique ponctuelle en considérant un couple de points de rencontre de tangentes communes à la conique U et à une conique tangente à une première droite fixe et à une seconde droite fixe en un point donné, et aussi en considérant un couple de points de rencontre de tangentes communes à la conique U et à une conique variable osculatrice à une conique donnée en un point donné.

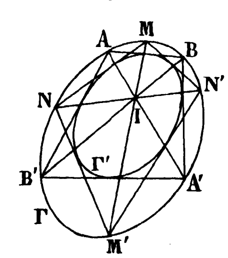
CHAPITRE V

QUADRILATÈRES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DEUX CONIQUES CONIQUES HARMONIQUES PONCTUELLE ET TANGENTIELLE

---

1. Théorème. — *Étant données deux coniques* Γ *et* Γ', *s'il existe un quadrilatère* $ABA'B'$, *de diagonales* AA' *et* BB', *inscrit à* Γ *et circonscrit à* Γ', *il en existe une infinité* (¹).

Soit I le point de rencontre des diagonales AA' et BB'. Le couple des tangentes à Γ' menées par un point M quelconque de Γ fait, d'après le théorème corrélatif du théorème de Desargues, partie de l'involution qui contient le couple des droites MA et MA' et le couple des droites MB et MB'. Par suite, les points N et N', autres que M, d'intersection de ces tangentes à Γ' avec Γ sont, d'après le théorème de Frégier, en ligne droite avec le point I. De même, les tangentes à Γ', menées soit par N, soit par N', rencontrent Γ en deux points dont l'un est M, l'autre étant à l'intersection de Γ avec la droite IM. Ainsi, le quadrilatère $MNM'N'$, de diagonales MM' et NN', est inscrit à Γ et circonscrit à Γ'; comme M est un point arbitraire de Γ, le théorème est établi.



Remarquons que les diagonales MM' et NN' se rencontrent au point I et que, d'après le théorème corrélatif du théorème de Desargues, ces deux droites sont conjuguées harmoniques par rapport

---

(¹) Ce théorème est dû à Poncelet, qui a démontré le théorèm plus générale suivant: *Étant données deux coniques* Γ *et* Γ', *s'il existe un contour polygonal fermé de n côtés qui soit inscrit à* Γ *et circonscrit à* Γ', *il en existe une infinité, n étant un entier quelconque donné supérieur à* 2.

aux tangentes menées de I à la conique Γ′. D'autre part, soient P et P′ le point de rencontre des droites MN et M′N′ et le point de rencontre des droites MN′ et M′N ; la droite PP′ est la polaire du point I à la fois par rapport à Γ et par rapport à Γ′. Enfin, d'après le théorème de Desargues, les points P et P′ sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la droite PP′ et de la conique Γ.

Théorème. — *Étant donnés une conique Γ et un point I non situé sur Γ, l'enveloppe d'une droite Δ telle que le couple des droites qui joignent le point I à ses points de rencontre avec Γ fasse partie d'une involution donnée est une conique Γ′.*

En effet, soient A et A′, B et B′ les points d'intersection de Γ avec deux droites formant un couple de l'involution donnée, C et C′, D et D′ les points d'intersection de Γ avec deux droites formant un second couple de cette même involution. Il existe une conique Γ′ inscrite au quadrilatère ABA′B′ et tangente à la droite CD. Comme il existe un quadrilatère inscrit à Γ et circonscrit à Γ′, il en existe une infinité, et, parmi ces quadrilatères, il en existe un qui a pour côté CD; les diagonales de ce quadrilatère se rencontrent en I, et ce quadrilatère est par suite le quadrilatère CDC′D′. La conique Γ′ étant définie de la façon précédente, le couple des diagonales d'un quadrilatère variable MNM′N′ inscrit à Γ et circonscrit à Γ′ fait partie d'une involution fixe, qui, ayant deux couples communs avec l'involution donnée, coïncide avec elle, d'où il résulte que l'enveloppe cherchée est la conique Γ′. Les tangentes menées de I à la conique Γ′ sont les droites doubles de l'involution donnée.

Une tangente Δ à la conique Γ′ est partagée harmoniquement par la conique Γ et le couple des rayons doubles de l'involution donnée. On a ainsi le théorème suivant :

Étant donnés une conique Γ et un couple de droites α et α′ ne se rencontrant pas en un point de Γ, l'enveloppe des droites Δ qui sont partagées harmoniquement par Γ et par le couple des droites α et α′ est une conique Γ′ telle qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits à Γ et circonscrits à Γ′.

Nous désignerons la conique Γ′ sous le nom de *conique tangentielle harmonique relative à Γ et au couple des droites α et α′*. Elle est tangente aux droites α et α′, et la droite qui joint les points de contact est la polaire par rapport à Γ du point de rencontre de α et de α′.

2. Par application du principe de dualité, on a les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés une conique* Γ' *et une droite* L *non tangente à* Γ', *le lieu d'un point* M *tel que les tangentes menées de ce point à* Γ' *rencontrent* L *en un couple de points faisant partie d'une involution fixe est une conique* Γ.

2° *Étant donnés une conique* Γ' *et un couple de points* ω *et* ω' *non situés sur une même tangente à* Γ', *le lieu d'un point* M *tel que les tangentes menées de ce point à* Γ' *soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites* $M\omega$ *et* $M\omega'$ *est une conique* Γ *telle qu'il existe une infinité de quadrilatères circonscrits à* Γ' *et inscrits à* Γ.

Nous désignerons la conique Γ sous le nom de *conique ponctuelle harmonique relative à* Γ' *et au couple des points* ω *et* ω'. Elle passe par les points ω et ω', et le point de rencontre des tangentes en ω et ω' est le pôle de la droite $\omega\omega'$ par rapport à Γ'.

3. Applications. — 1° *Étant donnés une conique* Γ *et un point* I *non situé sur* Γ, *l'enveloppe des cordes* MN *de* Γ *qui sont vues de* I *sous un angle droit est une conique* Γ' *qui a pour foyer le point* I *et pour directrice correspondante la polaire de* I *par rapport à* Γ.

Pour que Γ' soit tangente à la droite à l'infini, autrement dit, pour qu'elle soit une parabole, il faut et il suffit que Γ soit une hyperbole équilatère. Pour que Γ' soit un cercle, il faut et il suffit que la polaire de I par rapport à Γ soit la droite à l'infini, autrement dit, que I soit centre de la conique Γ.

Par application du théorème de Frégier, les cordes MN d'une conique Γ qui sont vues sous un angle droit d'un point I de cette conique passent par un point fixe situé sur la normale en I à la conique.

Quand Γ *n'est pas une hyperbole équilatère, le lieu des projections d'un point fixe* I *sur les cordes de* Γ *qui sont vues de* I *sous un angle droit est un cercle ; quand* Γ *est une hyperbole équilatère, ce lieu est une droite.*

2° *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une conique à centre deux tangentes rectangulaires est un cercle concentrique à la conique. Ce cercle, dit* orthoptique, *est la conique ponctuelle harmonique relative à la conique donnée et au couple des points cycliques.*

S'il s'agit d'une parabole, le lieu devient une droite, par application du théorème corrélatif du théorème de Frégier. Cette droite, qui est la directrice de la parabole, est dite *droite orthoptique*.

Soient deux coniques S et S′. D'un point A commun aux cercles orthoptiques de ces deux coniques on voit chacune des deux coniques sous un angle droit. L'involution formée par les couples de tangentes menées de ce point aux coniques du faisceau linéaire tangentiel qui contient S et S′, contenant deux couples de droites rectangulaires, admet pour rayons doubles les droites isotropes qui passent par le point A ; les couples de l'involution sont par suite tous formés de droites rectangulaires ; autrement dit, le point A est situé sur le cercle orthoptique d'une quelconque des coniques du faisceau linéaire tangentiel.

Donc,

Il existe deux points, distincts ou confondus, d'où l'on voit sous un angle droit toutes les coniques d'un faisceau linéaire tangentiel.

Autrement dit,

Les cercles orthoptiques des coniques d'un faisceau linéaire tangentiel forment un faisceau linéaire ponctuel.

Ce théorème est dû à Plücker.

L'axe radical des cercles orthoptiques est la directrice de la parabole du faisceau linéaire tangentiel. Les centres des cercles de rayon nul qui font partie du faisceau linéaire des cercles orthoptiques (points de Poncelet) sont les centres des hyperboles équilatères du faisceau linéaire tangentiel.

Considérons les coniques qui sont inscrites à un quadrilatère complet dont les sommets opposés sont A et A′, B et B′, C et C′. Ces coniques forment un faisceau linéaire tangentiel, et, parmi elles, se trouvent les coniques décomposées en les points A et A′, B et B′, C et C′. Les cercles orthoptiques de ces coniques décomposées sont les cercles de diamètres AA′, BB′, CC′. On a ainsi le théorème suivant :

Les cercles qui ont pour diamètres les diagonales d'un quadrilatère complet ont même axe radical.

Il en résulte que les milieux des diagonales du quadrilatère complet sont trois points en ligne droite.

Considérons les coniques qui sont tangentes en deux points donnés A et B à deux droites données Ox et Oy. Elles forment un faisceau linéaire tangentiel et leurs cercles orthoptiques forment un faisceau linéaire ponctuel. Un de ces cercles est le cercle de diamètre AB. Un des points de Poncelet du faisceau de cercles est le point O ; l'autre est le centre de l'hyperbole équilatère tangente en A et B aux deux droites Ox et Oy. On a le théorème suivant :

Étant données une conique Γ *et une corde* AB *de cette conique, le*

pôle de AB *par rapport à* Γ *est un point de Poncelet du faisceau linéaire ponctuel de cercles qui contient le cercle orthoptique de la conique et le cercle de diamètre* AB.

Soient C et D deux points conjugués harmoniques par rapport aux points A et B. O étant le pôle de AB par rapport à Γ, le triangle OCD est conjugué par rapport à Γ. Le cercle circonscrit au triangle OCD est orthogonal au cercle de rayon nul qui a pour centre O et au cercle de diamètre AB ; donc, il est orthogonal à tout cercle du faisceau linéaire ponctuel qui contient ces deux cercles, et, en particulier, au cercle orthoptique de la conique Γ ; c'est le théorème de Faure.

4. Soient deux coniques Γ, Γ' telles qu'il existe une infinité de quadrilatères MNM'N' à la fois inscrits à Γ et circonscrits à Γ'. Le point de rencontre I des diagonales MM' et NN' est fixe, et la troisième diagonale PP' du quadrilatère complet qui a pour côtés les quatre côtés du quadrilatère MNM'N', qui est la polaire de I par rapport à chacune des coniques Γ et Γ', est elle-même fixe. Soient ω et ω' les points d'intersection de la droite PP' avec la conique Γ. Quand M est en ω, il en est de même de M', car Iω est tangente à Γ en ω ; les deux autres sommets N et N' du quadrilatère variable MNM'N' sont alors les points de contact des tangentes menées de ω à Γ', et le quadrilatère MNM'N' *s'aplatit* suivant les deux côtés d'un angle. Il en est de même quand M est en ω'. On est ainsi conduit aux théorèmes suivants :

1° *Soient deux coniques* Γ *et* Γ'. *Si le pôle par rapport à* Γ' *d'une sécante commune* Δ *aux deux coniques est situé sur* Γ, *il existe une infinité de quadrilatères inscrits à* Γ *et circonscrits à* Γ'. *Le pôle par rapport à* Γ' *de la sécante commune* Δ' *aux deux coniques qui forme avec* Δ *une conique décomposée du faisceau linéaire ponctuel qui contient* Γ *et* Γ' *est aussi un point de* Γ.

2° *Étant donnés une conique et deux points* ω *et* ω', *ces deux points et les quatre points de contact des tangentes menées de ces points à la conique sont six points situés sur une même conique, laquelle est la conique ponctuelle harmonique relative à la conique donnée et au couple des points* ω *et* ω'.

Par application du principe de dualité, on a les deux théorèmes suivants :

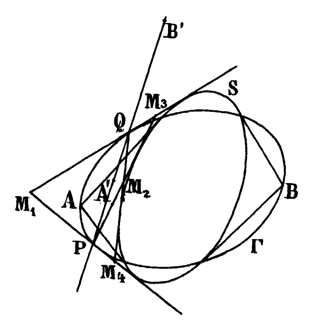
1° *Soient deux coniques* Γ *et* Γ'. *Si la polaire par rapport à* Γ *d'un point* A *de rencontre de deux tangentes communes aux deux coniques*

est tangente à Γ', il existe une infinité de quadrilatères inscrits à Γ et circonscrits à Γ'. La polaire par rapport à Γ du point A' de rencontre de deux tangentes communes aux deux coniques qui forme avec A une conique décomposée du faisceau linéaire tangentiel qui contient Γ et Γ' est aussi tangente à Γ'.

2° *Étant données une conique et deux droites α et α', ces deux droites et les quatre tangentes à la conique aux points d'intersection de cette conique avec les deux droites sont six tangentes à une même conique, laquelle est la conique tangentielle harmonique relative à la conique donnée et au couple des droites α et α'.*

5. Théorème. — *Soient une conique S et deux couples de points (A, B) et (A', B'). Si A' et B' sont conjugués par rapport à la conique ponctuelle harmonique Γ relative à S et au couple de points (A, B), A et B sont aussi conjugués par rapport à la conique ponctuelle harmonique Γ' relative à S et au couple de points (A', B').*

En effet, soient P et Q les points d'intersection de la conique Γ avec la droite A'B' ; ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport aux points A' et B'. Menons les tangentes à S qui passent par P et Q et qui se coupent en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 autres que P et Q ; ces quatre points sont situés sur la conique Γ'. Cela posé, les droites PA et PB sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes menées de P à la conique S ; A et B sont donc conjugués par rapport à la conique formée par ces deux tangentes et, de même, conjugués par rapport à la conique formée par les deux tangentes menées de Q à la conique S ; ils sont donc conjugués par rapport à toute conique passant par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 et en particulier par rapport à la conique Γ'. Le théorème est établi.



Théorème corrélatif. — *Soient une conique S et deux couples de droites (α, β) et (α', β'). Si α' et β' sont conjuguées par rapport à la conique tangentielle harmonique Γ relative à S et au couple de droites (α, β), α et β sont aussi conjuguées par rapport à la conique tangentielle harmonique Γ' relative à S et au couple de droites (α', β').*

Pour établir ce théorème, il suffit d'appliquer à la démonstration précédente le principe de dualité.

6. Applications. — 1° Dans la démonstration précédente, supposons que les points P et Q soient les points cycliques; la conique Γ est alors un cercle, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont les foyers de la conique S (supposée autre qu'une parabole), et Γ′ est une hyperbole équilatère qui passe par les foyers de S et qui admet les points A et B comme points conjugués. On a ainsi le théorème suivant :

Étant donnée une conique S *à centre, si deux points* A *et* B *sont tels que la conique ponctuelle harmonique relative à* S *et au couple* (A, B) *soit un cercle, les deux points* A *et* B *sont conjugués par rapport à toute hyperbole équilatère passant par les quatre foyers de* S.

La transformation réciproque qui fait se correspondre les points A et B est quadratique.

2° Dans la même démonstration, supposons que A′ et B′ soient les points cycliques. La conique Γ′ est alors le cercle orthoptique de la conique S, et la conique Γ est une hyperbole équilatère. On a le théorème suivant :

Étant donnée une conique S *à centre, pour que la conique harmonique ponctuelle relative à* S *et à un couple de points* (A, B) *soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que les deux points* A *et* B *soient conjugués par rapport au cercle orthoptique de* S.

Ce théorème se modifie ainsi lorsque la conique S est une parabole :

Étant donnée une parabole S, *pour que la conique harmonique ponctuelle relative à* S *et à un couple de points* (A, B) *soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que le milieu du segment* AB *soit situé sur la directrice de la parabole.*

3° Soient une conique S, un point A, les points de contact B et C des tangentes à S menées par A. Si H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC, la conique ponctuelle harmonique relative à S et au couple de points (A, H), qui passe par les points A, B, C, H, est une hyperbole équilatère. On a par suite le théorème suivant, dû à M. Kœnigs :

Étant donnée une conique S, *un point quelconque* A *et le point* H *de*

concours des hauteurs du triangle qui a pour sommets le point A *et les points de contact des tangentes menées de* A *à la conique sont conjugués par rapport au cercle orthoptique de la conique* S.

Dans le cas de la parabole, le milieu du segment AH est situé sur la directrice de la parabole.

On peut déduire de ce théorème la construction d'un triangle ayant pour sommets deux points B et C d'une conique S et le point de rencontre A des tangentes en B et C, connaissant le point H de rencontre des hauteurs de ce triangle. Le sommet A est à l'intersection de la polaire de H par rapport au cercle orthoptique de S et de l'hyperbole d'Apollonius de H par rapport à S. Le problème a deux solutions.

7. Il est clair que le premier théorème établi au § 5 subsiste si la conique S, considérée comme enveloppe de droites, se réduit à deux points I et I'. On voit ainsi, en particulier, que si deux points A et B sont conjugués par rapport au cercle de diamètre II', le lieu des points M tels que les droites MA et MB soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites MI et MI' est une hyperbole équilatère. D'après le théorème de Frégier, le pôle de II' par rapport à cette hyperbole est un point de AB. On a par suite le théorème suivant :

Étant données une hyperbole équilatère et une corde de cette hyperbole, une droite variable passant par le pôle de cette corde par rapport à l'hyperbole rencontre l'hyperbole en deux points conjugués par rapport au cercle décrit sur la corde comme diamètre.

8. Coniques harmoniques ponctuelle et tangentielle relatives à deux coniques. — 1° Considérons deux coniques Γ et Γ', proprement dites ou décomposées en droites ; soit à déterminer l'enveloppe des droites Δ telles que les points d'intersection d'une droite Δ avec Γ soient conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de cette droite avec Γ'. A cet effet, considérons les coniques Γ_1 et Γ_2 qui sont tangentes à Δ et qui font partie du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ et Γ', et montrons que *le rapport anharmonique des coniques* Γ, Γ', Γ_1 *et* Γ_2 *est égal à* — 1. Soient A et B, A' et B' les points d'intersection de Δ avec Γ et avec Γ', α_1 et α_2 les points de contact de Δ avec Γ_1 et Γ_2. Le rapport anharmonique des coniques Γ, Γ', Γ_1 et Γ_2 est égal au rapport anharmonique des polaires de A par rapport à ces coniques et par suite au rapport anharmonique des points d'intersection de ces droites avec Δ. Or, la polaire de A par rapport à Γ rencontre

Δ en A ; la polaire de A par rapport à Γ' rencontre Δ en B, qui, par hypothèse, est conjugué harmonique de A par rapport aux points A′ et B′ ; enfin, les polaires de A par rapport à Γ_1 et Γ_2 rencontrent Δ en α_1 et α_2. Comme, d'après le théorème de Desargues, les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points α_1 et α_2, le théorème est établi. Ce résultat est dû à Picquet(1).

Cela posé, cherchons combien il passe de droites Δ par un point P arbitrairement donné dans le plan. Soient D et D′ les polaires de P par rapport aux coniques Γ et Γ'. Les polaires de P par rapport aux coniques Γ_1 et Γ_2 passent par les points α_1 et α_2 et par le point de rencontre I des droites D et D′, et elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites D et D′. Il s'ensuit que les points de rencontre M et M′ de D et de D′ avec Δ sont conjugués harmoniques par rapport aux points α_1 et α_2 ; les trois couples de points (A, B), (A′, B′) et (M, M′) font partie d'une même involution. Il en résulte que si P′ est l'homologue de P dans cette involution, il existe une conique passant par P et P′ dans le faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ et la conique décomposée en les deux droites D et D′, et il existe aussi une conique passant par P et P′ dans le faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ' et la conique décomposée en les deux droites D et D′. Le point P′, qui détermine Δ, est un des points d'intersection autres que P des deux coniques appartenant chacune à un des deux faisceaux linéaires ponctuels précédents et passant par P. Or, ces deux coniques ont pour tangente en P la droite PI ; en effet, le point I est le point de rencontre des polaires de P par rapport à deux coniques de chacun de ces faisceaux ; il est donc situé sur la polaire de P par rapport à une conique quelconque de chacun de ces faisceaux et, en particulier, sur la tangente en P à la conique qui, dans chacun des faisceaux, passe par P. D'après cela, il existe deux points P′ et par suite deux droites Δ passant par P. On a donc le théorème suivant, dû à Salmon :

L'enveloppe des droites Δ qui sont partagées harmoniquement par deux coniques Γ et Γ' est une conique.

Par généralisation d'une dénomination antérieure, nous désignerons cette conique sous le nom de *conique tangentielle harmonique relative aux deux coniques Γ et Γ'.*

Supposons que les coniques Γ et Γ' soient proprement dites et se

(1) PICQUET, *Géométrie analytique.*

rencontrent en quatre points distincts. Parmi les droites Δ se trouvent évidemment les huit tangentes à ces deux coniques en leurs quatre points d'intersection. Ainsi,

Les huit tangentes à deux coniques proprement dites en leurs points d'intersection supposés distincts sont tangentes à une même conique.

Pour que la conique tangentielle harmonique relative à deux coniques Γ *et* Γ′ *se décompose en deux points, il faut et il suffit que le pôle d'une sécante commune* D *par rapport à une des deux coniques* Γ *et* Γ′ *coïncide avec le pôle par rapport à l'autre de la sécante commune* D′ *qui forme avec* D *une conique décomposée du faisceau linéaire ponctuel qui contient* Γ *et* Γ′.

En effet, supposons que la conique tangentielle harmonique S se décompose en deux points. Comme les huit tangentes aux coniques Γ et Γ′ en leurs quatre points d'intersection sont tangentes à S, nécessairement le pôle ω d'une sécante commune D par rapport à Γ est un des deux points en lesquels se décompose S, et il est aussi le pôle de D′ par rapport à Γ′. Le point ω′ qui avec ω forme la conique décomposée S est à la fois le pôle de D par rapport à Γ′ et le pôle de D′ par rapport à Γ. Réciproquement, supposons qu'il existe un point ω qui soit à la fois pôle de D par rapport à Γ et pôle de D′ par rapport à Γ′. Par ce point, il passe quatre tangentes à la conique S, qui par suite se décompose en deux points.

2° Par application du principe de dualité, on a les résultats suivants :

Étant données deux coniques Γ *et* Γ′, *proprement dites ou décomposées en deux points, le lieu des points* M *tels que les tangentes menées d'un point* M *à la conique* Γ *soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées de* M *à la conique* Γ′ *est une conique, que, par extension d'une dénomination antérieure, nous désignerons sous le nom de* conique ponctuelle harmonique relative aux coniques Γ et Γ′.

Si l'on suppose que les coniques Γ *et* Γ′ *sont proprement dites et admettent quatre tangentes communes distinctes, les huit points de contact des quatre tangentes communes sont sur une même conique, qui est la conique ponctuelle harmonique relative aux coniques* Γ *et* Γ′.

Pour que la conique ponctuelle harmonique relative aux coniques Γ *et* Γ′ *se décompose en deux droites, il faut et il suffit que la polaire par rapport à l'une des deux coniques* Γ *et* Γ′ *d'un point* A *de rencontre*

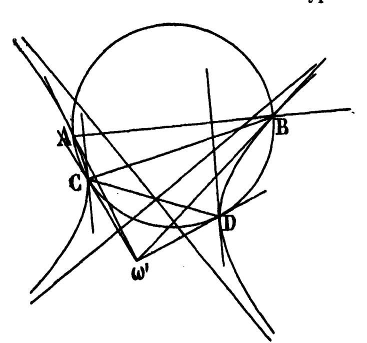
de deux de leurs tangentes communes coïncide avec la polaire par rapport à l'autre du point A' de rencontre de deux tangentes communes à Γ et à Γ' qui forme avec A une conique décomposée du faisceau linéaire tangentiel qui contient Γ et Γ'.

9. Applications. — 1° Soient deux cercles Γ et Γ', de centres O et O'. La conique tangentielle harmonique relative à ces deux cercles est tangente aux droites isotropes qui passent par O et aux droites isotropes qui passent par O'. On a ainsi le théorème suivant :

L'enveloppe des droites qui sont partagées harmoniquement par deux cercles est une conique qui admet les centres des deux cercles comme foyers.

Si les deux cercles sont orthogonaux, le centre de l'un des deux cercles est à la fois le pôle de la droite à l'infini par rapport à ce cercle et le pôle de l'axe radical des deux cercles par rapport à l'autre cercle ; alors, la conique tangentielle harmonique se décompose en les centres des deux cercles.

2° Soient une hyperbole équilatère H et un cercle Γ ayant pour diamètre une corde AB de cette hyperbole. Ces deux coniques se rencontrent en deux points C et D autres que A et B. Montrons que la droite CD est un diamètre de l'hyperbole. En effet, l'angle ACB est droit ; la conique formée par les deux droites CA et CB est donc une hyperbole équilatère. Considérons le faisceau linéaire ponctuel qui contient cette conique décomposée et l'hyperbole équilatère H ; toutes les coniques de ce faisceau sont des hyperboles équilatères. Parmi ces coniques se trouve la conique décomposée en la droite AB et la tangente en C à H. On voit ainsi que la tangente en C à H est perpendiculaire à la droite AB. Il en est de même de la tangente en D à H, et, les tangentes en C et D à H étant ainsi parallèles, la droite CD est un diamètre de H.



Ce qui précède montre que le point ω à l'infini dans la direction perpendiculaire à AB est à la fois pôle de la droite AB par rapport à Γ et pôle de la droite CD par rapport à H. Il s'ensuit que la conique tangentielle harmonique relative aux coniques H et Γ se décompose en deux points dont l'un est ω, l'autre point ω' étant à la fois le pôle de AB par rapport à H et le pôle de CD par rapport à Γ.

Soit un point M variable du cercle Γ. La polaire de ce point par rapport à H rencontre le cercle Γ en deux points P et Q. Les points M et P sont conjugués par rapport à H, ainsi que les points M et Q; il s'ensuit que chacune des deux droites MP et MQ est partagée harmoniquement par H et par Γ, et qu'ainsi une de ces deux droites est constamment perpendiculaire à AB, l'autre passant constamment par le point ω'.

Soit de même un point M' variable de H. La polaire de M' par rapport au cercle Γ rencontre H en deux points P' et Q'. Des deux droites M'P' et M'Q', l'une est constamment perpendiculaire à AB, l'autre passe constamment par le point fixe ω'.

3° Soient une hyperbole équilatère H, un diamètre de cette hyperbole et un cercle Γ passant par les extrémités C et D de ce diamètre. Ces deux coniques se rencontrent en deux points A et B autres que C et D. Montrons que la droite AB est un diamètre du cercle. En effet, la droite AB est parallèle à la symétrique de CD par rapport à un axe de l'hyperbole et la tangente en C à l'hyperbole est parallèle à la symétrique de CD par rapport à une asymptote. Comme l'axe et l'asymptote de l'hyperbole font un angle de 45°, il s'ensuit que la tangente en C à l'hyperbole est perpendiculaire à AB. Considérons le faisceau linéaire ponctuel qui contient l'hyperbole H et la conique décomposée en la droite AB et la tangente en C à H; toutes les coniques de ce faisceau sont des hyperboles équilatères. Parmi ces coniques se trouve la conique décomposée en les droites CA et CB, qui sont donc rectangulaires. On voit alors que AB est un diamètre du cercle.

On peut appliquer par suite ce qui a été établi au 2°. La conique tangentielle harmonique relative aux coniques H et Γ se décompose en deux points dont l'un est à l'infini.

CHAPITRE VI

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES CONIQUES

---

1. Théorème. — *Soit un triangle* ABC. *Si* α, β, γ *et* α', β', γ' *sont les points d'intersection de deux transversales* Δ *et* Δ' *respectivement avec les côtés* BC, CA, AB, *on a*

$$(\mathrm{BC}\alpha\alpha') \cdot (\mathrm{CA}\beta\beta') \cdot (\mathrm{AB}\gamma\gamma') = +1.$$

En effet, il est possible de faire une projection conique de la figure sur un plan de façon que la droite Δ' ait pour projection la droite à l'infini du plan de projection. En conservant, pour simplifier les notations, les mêmes lettres pour la projection, on est alors ramené à établir la relation

$$\frac{\overline{\alpha\mathrm{B}}}{\overline{\alpha\mathrm{C}}} \cdot \frac{\overline{\beta\mathrm{C}}}{\overline{\beta\mathrm{A}}} \cdot \frac{\overline{\gamma\mathrm{A}}}{\overline{\gamma\mathrm{B}}} = 1;$$

c'est le théorème de Ménélaüs.

Il existe un théorème qui se déduit de ce théorème par dualité.

Théorème de Carnot. — *Soit un triangle* ABC *dont les côtés* BC, CA, AB *sont respectivement rencontrés par une droite* Δ *en* α, β, γ. *Si une conique* Γ *rencontre les droites* BC, CA, AB *respectivement aux points* a *et* a', b *et* b', c *et* c', *on a*

$$(\mathrm{BC}a\alpha) \cdot (\mathrm{BC}a'\alpha) \cdot (\mathrm{CA}b\beta) \cdot (\mathrm{CA}b'\beta) \cdot (\mathrm{AB}c\gamma) \cdot (\mathrm{AB}c'\gamma) = +1.$$

En effet, soient m et m' les points d'intersection de AB avec les droites ab et $a'b'$. D'après le théorème précédent, on a

$$(\mathrm{BC}a\alpha) \cdot (\mathrm{CA}b\beta) \cdot (\mathrm{AB}m\gamma) = 1,$$
$$(\mathrm{BC}a'\alpha) \cdot (\mathrm{CA}b'\beta) \cdot (\mathrm{AB}m'\gamma) = 1.$$

De plus, d'après le théorème de Desargues, les trois couples de

points (A, B), (c, c') et (m, m') font partie d'une même involution, et l'on a par suite

$$(\mathrm{AB}c\gamma) \cdot (\mathrm{AB}c'\gamma) = (\mathrm{AB}m\gamma) \cdot (\mathrm{AB}m'\gamma).$$

Si on multiplie ces trois égalités membre à membre, on obtient l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

Il existe un théorème qui se déduit du théorème de Carnot par dualité.

Théorème de Newton. — Supposons que la droite BC soit à l'infini. Alors on a

$$(\mathrm{CA}b\beta) = \frac{\overline{\beta\mathrm{A}}}{\overline{b\mathrm{A}}}, \qquad (\mathrm{CA}b'\beta) = \frac{\overline{\beta\mathrm{A}}}{\overline{b'\mathrm{A}}},$$

$$(\mathrm{AB}c\gamma) = \frac{\overline{c\mathrm{A}}}{\overline{\gamma\mathrm{A}}}, \qquad (\mathrm{AB}c'\gamma) = \frac{\overline{c'\mathrm{A}}}{\overline{\gamma\mathrm{A}}}.$$

On a donc

$$\frac{\overline{c\mathrm{A}} \cdot \overline{c'\mathrm{A}}}{\overline{b\mathrm{A}} \cdot \overline{b'\mathrm{A}}} = \frac{\overline{\gamma\mathrm{A}}^2}{\overline{\beta\mathrm{A}}^2} \cdot \frac{1}{(\mathrm{BC}a\alpha)} \cdot \frac{1}{(\mathrm{BC}a'\alpha)}.$$

Cela posé, si A varie et si les droites AB et AC ont des directions fixes, le second membre de cette égalité a une valeur constante. On a par suite le théorème suivant :

Si les côtés d'un angle variable de sommet A *rencontrent une conique fixe respectivement aux points* b, b' *et* c, c', *le rapport* $\frac{\overline{\mathrm{A}b} \cdot \overline{\mathrm{A}b'}}{\overline{\mathrm{A}c} \cdot \overline{\mathrm{A}c'}}$ *a une valeur constante quand les côtés de l'angle restent parallèles à deux droites fixes.*

Théorème de Mac-Laurin. — Soient deux angles de sommets A et A_1 dont les côtés sont respectivement parallèles et rencontrent la conique considérée aux points b, b', b_1, b'_1 et c, c', c_1, c'_1. D'après le théorème de Newton, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{A}b} \cdot \overline{\mathrm{A}b'}}{\overline{\mathrm{A}c} \cdot \overline{\mathrm{A}c'}} = \frac{\overline{\mathrm{A}_1 b_1} \cdot \overline{\mathrm{A}_1 b'_1}}{\overline{\mathrm{A}_1 c_1} \cdot \overline{\mathrm{A}_1 c'_1}}$$

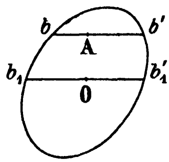
et par suite

$$\frac{\overline{\mathrm{A}b} \cdot \overline{\mathrm{A}b'}}{\overline{\mathrm{A}_1 b_1} \cdot \overline{\mathrm{A}'_1 b'_1}} = \frac{\overline{\mathrm{A}c} \cdot \overline{\mathrm{A}c'}}{\overline{\mathrm{A}_1 c_1} \cdot \overline{\mathrm{A}'_1 c'_1}}.$$

On a ainsi le théorème suivant :

Si deux droites parallèles rencontrent une conique aux points b, b' *et* b_1, b'_1 *et varient en passant par deux points fixes* A *et* A_1, *le rapport* $\dfrac{\overline{Ab}\cdot\overline{Ab'}}{\overline{A_1b_1}\cdot\overline{A_1b'_1}}$ *a une valeur constante.*

2. Indices. — Supposons que la conique ait un centre O et faisons coïncider A_1 avec O. Les points b_1 et b'_1 sont symétriques par rapport à O. Posons



$$\overline{Ob_1} = -\overline{Ob'_1} = d.$$

Quelle que soit la sécante menée par le point fixe A, le rapport $\dfrac{\overline{Ab}\cdot\overline{Ab'}}{d^2}$ a une valeur constante. Ce nombre sera dit, d'après Faure, *l'indice du point* A *par rapport à la conique*. Si la conique est un cercle, l'indice du point A est égal à $-\dfrac{P}{R^2}$, P étant la puissance du point par rapport au cercle et R étant le rayon.

1° Soient deux points M_1 et M_2 conjugués par rapport à une conique Γ de centre O, variant sur une droite fixe Δ qui rencontre la conique aux points A et A'. Soient μ_1 et μ_2 les indices des points M_1 et M_2. Si ω est le milieu de la corde AA' et si d est la demi-longueur du diamètre de la conique qui est parallèle à cette corde, on a

$$\mu_1 = \frac{\overline{M_1A}\cdot\overline{M_1A'}}{d^2} = \frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1\omega}}{d^2}, \qquad \mu_2 = \frac{\overline{M_2M_1}\cdot\overline{M_2\omega}}{d^2}.$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{d^2}{\overline{M_1M_2}}\left(\frac{1}{\overline{M_1\omega}} - \frac{1}{\overline{M_2\omega}}\right) = -\frac{d^2}{\overline{\omega A}^2} = \text{const.},$$

et

$$\frac{\mu_1\cdot\mu_2}{\overline{M_1M_2}^2} = -\frac{\overline{M_1\omega}\cdot\overline{M_2\omega}}{d^4} = -\frac{\overline{\omega A}^2}{d^4} = \text{const.}$$

On a donc les théorèmes suivants :

1° *La somme des inverses des indices de deux points conjugués par rapport à la conique qui varient sur une droite fixe est constante.*

2° *Le produit des indices de deux points conjugués par rapport à la conique qui varient sur une droite fixe est dans un rapport constant avec le carré de la distance des deux points.*

Nous désignerons ce rapport constant sous le nom d'*indice de la droite* M_1M_2 et nous le représenterons par la notation μ_{12}. L'indice d'un diamètre de la conique est égal à $-\frac{1}{d^2}$, d étant la demi-longueur de ce diamètre.

Soient deux droites conjuguées variables passant par M_3 et rencontrant la polaire de M_3 aux points conjugués M_1 et M_2. On a

$$\mu_{13} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_3}{\overline{M_1M_3}^2}, \qquad \mu_{23} = \frac{\mu_2 \cdot \mu_3}{\overline{M_2M_3}^2}.$$

Donc on a

$$\frac{1}{\mu_{13}} + \frac{1}{\mu_{23}} = \frac{1}{\mu_3}\left[\frac{\overline{M_1M_3}^2}{\mu_1} + \frac{\overline{M_2M_3}^2}{\mu_2}\right]$$
$$= \frac{d^2}{\mu_3}\left[\frac{\overline{M_1M_3}^2}{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1\omega}} + \frac{\overline{M_2M_3}^2}{\overline{M_2M_1} \cdot \overline{M_2\omega}}\right],$$

ω étant le milieu de la corde de la conique située sur M_1M_2, d étant la demi-longueur du diamètre parallèle à M_1M_2. D'après la formule de Stewart, la parenthèse est égale à

$$1 - \frac{\overline{\omega M_3}^2}{\overline{\omega M_1} \cdot \overline{\omega M_2}}$$

et, le produit $\overline{\omega M_1} \cdot \overline{\omega M_2}$ étant constant, on a

$$\frac{1}{\mu_{13}} + \frac{1}{\mu_{23}} = \text{const.}$$

Donc,

3° *La somme des inverses des indices de deux droites conjuguées par rapport à une conique à centre qui varient en passant par un point fixe est constante.*

Par définition de μ_{13} et de μ_{23}, on a

$$\mu_{13} \cdot \mu_{23} = (\mu_3)^2 \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\overline{M_3M_1}^2 \cdot \overline{M_3M_2}^2}.$$

Mais si H est le pied de la perpendiculaire abaissée de M_3 sur M_1M_2, on a

$$2 \text{ aire } M_1M_2M_3 = M_3M_1 \cdot M_3M_2 \sin(M_3M_1, M_3M_2) = M_1M_2 \cdot M_3H ;$$

par suite, on a

$$\frac{\mu_{13} \cdot \mu_{23}}{\sin^2(M_3M_1, M_3M_2)} = (\mu_3)^2 \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\overline{M_1M_2}^2 \cdot \overline{M_3H}^2} = \frac{(\mu_3)^2}{\overline{M_3H}^2} \cdot \mu_{12} = \text{const.}$$

Donc,

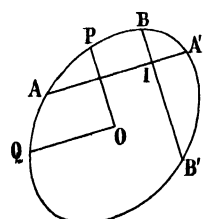
4° *Le produit des indices de deux droites conjuguées par rapport à une conique à centre qui varient en passant par un point fixe est dans un rapport constant avec le carré du sinus de leur angle.*

Théorèmes d'Apollonius. — La démonstration des deux derniers théorèmes suppose que le point fixe par lequel passent les deux droites conjuguées variables ne coïncide pas avec le centre de la conique. Par raison de continuité, ces théorèmes sont encore valables pour deux diamètres conjugués quelconques. Comme l'indice d'un diamètre est égal à $-\frac{1}{d^2}$, d étant la demi-longueur de ce diamètre, on a les théorèmes suivants dits *d'Apollonius :*

1° *La somme des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués quelconques est constante ;*

2° *Le produit des longueurs de deux diamètres conjugués quelconques et du sinus de leur angle est constant*, ou encore, *l'aire du parallélogramme qui a pour côtés deux diamètres conjugués quelconques est constante.*

Théorème. — *Soient deux droites rectangulaires variables passant par un point fixe* I. *Si* A *et* A′, B *et* B′ *sont respectivement les points d'intersection de ces droites avec une conique fixe à centre, la somme*



$$\frac{1}{\overline{IA} \cdot \overline{IA'}} + \frac{1}{\overline{IB} \cdot \overline{IB'}}$$

est constante.

En effet, soient P et Q deux points de la conique situés sur les perpendiculaires aux deux droites variables menées par le centre O. On a

$$\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IA'}}{\overline{OQ}^2} = \frac{\overline{IB} \cdot \overline{IB'}}{\overline{OP}^2},$$

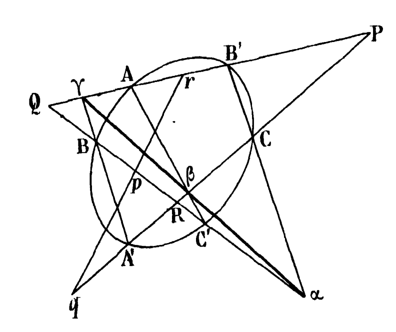
d'où

$$\frac{\dfrac{1}{\overline{IA}\cdot\overline{IA'}}}{\dfrac{1}{\overline{OP}^2}} = \frac{\dfrac{1}{\overline{IB}\cdot\overline{IB'}}}{\dfrac{1}{\overline{OQ}^2}} = \frac{\dfrac{1}{\overline{IA}\cdot\overline{IA'}}+\dfrac{1}{\overline{IB}\cdot\overline{IB'}}}{\dfrac{1}{\overline{OQ}^2}+\dfrac{1}{\overline{OP}^2}} = \frac{1}{\mu},$$

μ désignant l'indice du point I. Or, comme nous l'avons montré (V, § 3), la droite PQ est tangente à un cercle fixe de centre O, et par suite, d'après une propriété du triangle rectangle, $\frac{1}{\overline{OP}^2}+\frac{1}{\overline{OQ}^2}$ est constant; le théorème est ainsi établi.

3. Théorème de Pascal. — *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se rencontrent en trois points situés en ligne droite* (1).

Soit l'hexagone inscrit à la conique, dont les six sommets sont consécutivement A, B′, C, A′, B, C′, et soient α, β, γ les points de rencontre des côtés opposés B′C et BC′, C′A et CA′, A′B et B′A ; il s'agit d'établir que les points α, β, γ sont en ligne droite. Considérons le triangle qui a pour côtés les droites AB′, CA′ et BC′, désignons par P, Q, R les points de rencontre des côtés AB′ et CA′, AB′ et BC′, CA′ et BC′, et introduisons une transversale auxiliaire rencontrant les côtés BC′, CA′, AB′ respectivement aux points p, q, r.



Par application du théorème de Carnot au triangle PQR coupé par la conique donnée, on a

$$(\mathrm{PQA}r)\,.\,(\mathrm{PQB'}r)\,.\,(\mathrm{QRB}p)\,.\,(\mathrm{QRC'}p)\,.\,(\mathrm{RPC}q)\,.\,(\mathrm{RPA'}q) = 1.$$

Par application du théorème de Ménélaüs au même triangle coupé par les transversales B′C, A′B, C′A, on a

(1) Ce théorème peut être aussi établi comme conséquence du théorème de Chasles.

$$(PQrB') \,.\, (QRp\alpha) \,.\, (RPqC) = 1,$$
$$(PQr\gamma) \,.\, (QRpB) \,.\, (RPqA') = 1,$$
$$(PQrA) \,.\, (QRpC') \,.\, (RPq\beta) = 1.$$

En multipliant ces inégalités membre à membre, on obtient la relation

$$(QRp\alpha) \,.\, (PQr\gamma) \,.\, (RPq\beta) = 1,$$

qui prouve que les points α, β, γ sont en ligne droite.

On peut supposer que deux sommets consécutifs de l'hexagone sont confondus, la droite qui les joint étant alors tangente à la conique. On a alors les deux énoncés suivants :

1° *Soit un quadrilatère inscrit à une conique, ayant pour sommets opposés* A *et* A', B *et* B'. *Le point de rencontre des tangentes en* A *et* A', *le point de rencontre des tangentes en* B *et* B', *le point de rencontre des droites* AB *et* A'B' *et le point de rencontre des droites* AB' *et* A'B *sont quatre points en ligne droite.*

2° *Soit un triangle* ABC *inscrit à une conique. Les points de rencontre de la tangente en* A *et du côté* BC, *de la tangente en* B *et du côté* AC, *de la tangente en* C *et du côté* AB *sont en ligne droite.*

Théorème de Brianchon. — Par transformation par polaires réciproques par rapport à la conique, le théorème de Pascal conduit au théorème suivant, dû à Brianchon :

Les trois droites qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique sont concourantes.

De ce théorème on déduit les théorèmes suivants :

1° *Soit un quadrilatère circonscrit à une conique. Les deux diagonales et les deux droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont concourantes.*

2° *Soit un triangle circonscrit à une conique. Les trois droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés sont concourantes.*

CHAPITRE VII

COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ ET COURBES DE LA TROISIÈME CLASSE

1. Théorème. — *Par neuf points du plan il passe au moins une cubique.*

En effet, soit, en coordonnées homogènes, l'équation indéterminée d'une cubique

$$f(x, y, z) = 0,$$

$f(x, y, z)$ ayant dix coefficients. En exprimant que la courbe passe par les neuf points $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, 9)$, on obtient pour déterminer ces coefficients neuf équations

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0,$$

qui sont linéaires et homogènes. Leur nombre étant plus petit que le nombre des inconnues, elles admettent au moins une solution non nulle, à un facteur de proportionnalité près, ce qui démontre le théorème.

Théorème. — *Par huit points du plan, il passe une infinité de cubiques. En outre, si les huit points n'appartiennent pas à une même conique et si parmi ces huit points il n'en existe pas cinq appartenant à une même droite, parmi les cubiques qui passent par ces huit points il en existe une, et en général une seule, qui passe par un neuvième point donné du plan.*

En effet, en exprimant que la cubique d'équation homogène

$$f(x, y, z) = 0$$

passe par les huit points $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, on obtient huit équations linéaires et homogènes par rapport aux dix coefficients du polynome $f(x, y, z)$. Le rang r du système de ces équa-

tions étant inférieur d'au moins deux unités au nombre des inconnues, ce système admet une infinité de solutions non proportionnelles, ce qui montre que par huit points du plan il passe toujours une infinité de cubiques.

Montrons que pour que le rang r soit égal à 8, il faut et il suffit que les huit points ne soient pas situés sur une même conique et que parmi ces huit points il n'y en ait pas cinq en ligne droite.

En effet, supposons d'abord que r soit égal à 8. Il existe alors deux inconnues non principales; si λ_1 et λ_2 sont les valeurs numériques arbitraires attribuées à ces inconnues, les cubiques Γ qui passent par les huit points donnés ont une équation générale de la forme

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) = 0,$$

f_1 et f_2 étant deux polynomes du troisième degré déterminés non proportionnels. Il s'ensuit que par tout point du plan non commun aux deux cubiques d'équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ il passe une cubique Γ et une seule. Cela posé :

1° Si les huit points donnés étaient situés sur une même conique S, parmi les cubiques Γ se trouveraient des cubiques décomposées en la conique S et une droite arbitraire, et par tout point du plan il passerait une infinité de cubiques Γ.

2° Si cinq des huit points donnés étaient situés sur une même droite D, parmi les cubiques Γ se trouveraient des cubiques décomposées en la droite D et une conique passant par ceux des huit points qui, en nombre au plus égal à trois, ne sont pas situés sur D, et par tout point du plan il passerait encore une infinité de cubiques Γ.

Inversement, montrons que si les huit points A donnés ne sont pas situés sur une même conique et si parmi ces huit points il n'y en a pas cinq en ligne droite, r est égal à 8. Supposons en effet que r soit plus petit que 8; il existerait alors r des huit points qui seraient tels que toute cubique passant par ces r points passerait nécessairement par les $8 - r$ autres. Il en résulterait que par $9 - r$ points du plan et par suite, $9 - r$ étant au moins égal à 2, que par deux points α et β du plan il passerait au moins une cubique Γ.

Cela posé, distinguons plusieurs cas :

1° Supposons que parmi les points A il en existe sept qui soient situés sur une conique S proprement dite. Toute cubique Γ se décompose en la conique S et une droite passant par le huitième point A. Si l'on considère deux points α et β non situés sur S et

non en ligne droite avec le huitième point A, il est impossible de faire passer une cubique Γ par les deux points α et β.

2° Supposons que parmi les points A il en existe sept qui soient situés sur une conique décomposée en deux droites Δ et Δ', l'une Δ passant par quatre des sept points et l'autre Δ' passant par les trois autres. Toute cubique Γ se décompose nécessairement en la droite Δ et en une conique qui se décompose elle-même en la droite Δ' et une droite passant par le huitième point. Si l'on considère deux points α et β en dehors de Δ et de Δ' et non en ligne droite avec le huitième point A, il est impossible de faire passer une cubique Γ par les points α et β.

3° Supposons que parmi les points A il en existe six qui soient situés sur une conique proprement dite S. Si l'on considère sur la conique S un point α autre que ces six points A, quel que soit β, toute cubique Γ passant par les points α et β se décompose nécessairement en la conique S et la droite D qui passe par les deux autres points A. Si l'on considère un point β en dehors de S et de D, il n'existe pas de cubique Γ passant par α et β.

4° Supposons qu'il y ait six points A situés sur une conique décomposée en deux droites Δ et Δ'. Deux hypothèses sont à examiner : 1°) Une de ces droites, Δ par exemple, passe par quatre des six points A, la droite Δ' passant par les deux autres. Toute cubique Γ se décompose alors nécessairement en la droite Δ et une conique S. Prenons un point α de Δ', non situé sur Δ ; si une cubique Γ passe par α, la conique S se décompose en la droite Δ' et la droite D qui passe par les deux points A autres que les six points A considérés. Si l'on choisit un point β en dehors de Δ, de Δ', et de D, il n'existe pas de cubique Γ passant par les points α et β. — 2°) Chacune des droites Δ et Δ' passe par trois des six points A considérés. Si l'on choisit un point α de Δ autre que les trois points A situés sur Δ, toute cubique Γ passant par α se décompose nécessairement en la droite Δ et une conique S, qui se décompose elle-même en la droite Δ' et la droite D qui passe par les deux points A autres que les six points A considérés. Si l'on choisit un point β qui ne soit situé sur aucune des droites Δ, Δ' et D, il n'existe pas de cubique Γ passant par les points α et β.

5° Supposons qu'il n'y ait pas de conique passant par six des points A, mais qu'il existe trois points A situés sur une droite Δ ; soient A_1, A_2, A_3 ces trois points. Plaçons α sur Δ. Toute cubique Γ passant par α se décompose nécessairement en la droite Δ et une conique S qui passe par les points A_4, A_5, A_6, A_7, A_8. Parmi ces cinq

derniers points A, il n'en existe pas trois qui soient en ligne droite, sinon il y aurait une conique décomposée passant par six ou sept des points A. Il s'ensuit que la conique S est déterminée d'une façon unique. Si l'on considère un point β qui ne soit situé ni sur Δ ni sur S, il n'existe pas de cubique Γ passant par α et β.

6° Supposons que parmi les points A il n'y en ait ni trois en ligne droite ni six sur une même conique. Soient deux de ces points A_1 et A_2, et plaçons α et β sur la droite A_1A_2. Une cubique Γ passant par α et β se décompose nécessairement en la droite A_1A_2 et une conique, et ainsi les six points A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 seraient situés sur une même conique ; il y a contradiction.

La réciproque est ainsi établie.

Le rang r étant supposé égal à 8, par tout point M du plan, non commun aux cubiques d'équations

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

il passe une cubique Γ et une seule.

2. Cherchons dans quelles conditions les deux cubiques d'équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ ont une infinité de points communs. Deux cas sont à envisager.

1° Les deux cubiques contiennent une conique commune S, proprement dite ou décomposée ; l'une des cubiques se décompose en la conique S et une droite Δ_1, l'autre se décompose en la conique S et une droite Δ_2. Les deux droites Δ_1 et Δ_2 étant distinctes, la conique S contient sept des points A. Inversement, si sept des points A sont sur une conique, les deux cubiques ont ou bien cette conique commune ou bien une droite commune faisant partie de cette conique.

2° Les deux cubiques n'ont pas de conique commune, mais elles ont une droite commune et une seule, Δ ; l'une des cubiques se décompose en Δ et une conique S_1, l'autre se décompose en Δ et une conique S_2. La droite Δ contient quatre au moins des points A, sinon les deux coniques S_1 et S_2 auraient au moins cinq points communs ; comme elles sont distinctes, quatre au moins de ces cinq points A seraient sur une droite Δ' distincte de Δ, et ainsi les deux cubiques auraient une conique commune décomposée en les deux droites Δ et Δ', ce qui est contraire à l'hypothèse. Inversement, si quatre des points A sont sur une droite Δ, chaque cubique Γ se décompose en la droite Δ et une conique.

On voit ainsi que pour que les cubiques Γ aient une infinité de

points communs, il faut et il suffit que de deux choses l'une, ou bien sept des huit points A soient situés sur une même conique, ou bien quatre des points A soient situés sur une même droite. Dans le cas général, où il n'existe ni sept des points A sur une même conique, ni quatre des points A sur une même droite, les cubiques Γ ont, outre les points communs A, un neuvième point commun. On a donc le théorème suivant, dit *du neuvième point :*

Par huit points donnés, tels qu'il n'y en ait pas sept sur une même conique ni quatre sur une même droite, il passe une infinité de cubiques Γ *ayant un neuvième point commun. Par un point de plus autre que les huit points donnés et que le neuvième point commun aux cubiques* Γ, *il passe une cubique* Γ *et une seule.*

3. Applications. — 1° Soient une conique proprement dite S et sur cette conique six points A, B, C, A′, B′, C′. Désignons par α, β, γ les points de rencontre de B′C et de BC′, de C′A et de CA′, de A′B et de BA′, respectivement, et proposons-nous d'établir que les points α, β, γ sont en ligne droite. A cet effet, considérons les huit points A, B′, C, A′, B, C′, α et β. Parmi ces huit points, il n'y en a pas sept sur une même conique, ni quatre sur une même droite ; par ces huit points, il passe une infinité de cubiques Γ ayant un neuvième point commun. Parmi ces cubiques Γ se trouvent les deux cubiques formées l'une des droites AB′, CA′, BC′, l'autre des droites B′C, A′B, C′A ; il s'ensuit que le neuvième point est le point γ. D'autre part, parmi les cubiques Γ se trouve la cubique formée de la conique S et de la droite αβ. Cette cubique passant par γ qui n'est pas situé sur S, la droite αβ passe par γ. *C'est le théorème de Pascal* (VI, § 3).

2° Soient une cubique proprement dite Γ et une conique S proprement dite ou décomposée, rencontrant la cubique en six points distincts A, A′, B, B′, C, C′. Montrons que les points de rencontre A″, B″, C″, autres que A et A′, B et B′, C et C′, des droites AA′, BB′, CC′ respectivement avec la cubique Γ sont en ligne droite. En effet, considérons les huit points A, A′, B, B′, C, C′, A″, B″. Parmi ces huit points, il n'y en a ni sept sur une conique ni quatre sur une droite ; le théorème du neuvième point est donc applicable. Deux des cubiques qui passent par les huit points considérés étant la cubique Γ et la cubique formée des droites AA′, BB′, CC′, on voit que le neuvième point est le point C″, et comme la cubique formée de la conique S et de la droite A″B″ passe aussi par les huit points considérés, cette cubique passe par C″, qui, n'étant pas situé sur S, est situé sur A″B″.

3° Soient une cubique Γ et deux droites Δ et Δ′ rencontrant la cubique Γ respectivement aux points A, B, C et A′, B′, C′. Les points de rencontre A″, B″, C″, autres que les six points précédents, de la cubique Γ avec les droites AA′, BB′, CC′ sont sur une droite Δ″. Cela posé, faisons tendre les points variables A′, B′, C′ de Γ respectivement vers les points fixes A, B, C de Γ ; les droites AA′, BB′, CC′ tendent respectivement vers les tangentes en A, B, C à Γ. On a ainsi le théorème suivant :

A, B, C *étant trois points en ligne droite d'une cubique* Γ *proprement dite, les points de rencontre* A_1, B_1, C_1, *autres que* A, B, C, *de la cubique* Γ *avec les tangentes en* A, B, C *sont en ligne droite.*

En appliquant ce théorème aux points d'intersection supposés distincts de la cubique avec la droite de l'infini, on a le théorème suivant :

Étant donnée une cubique ayant trois directions asymptotiques distinctes, les points d'intersection à distance finie de la cubique avec ses asymptotes sont en ligne droite.

4° Si, dans ce qui précède, on suppose que les points A et B sont d'inflexion, le point A_1 coïncide avec A et le point B_1 avec B ; la droite A_1B_1 coïncide donc avec la droite AB, et par suite C_1 coïncide avec C, ce qui prouve que C est aussi un point d'inflexion.

Ainsi, *la droite qui joint deux points d'inflexion d'une cubique rencontre cette cubique en un troisième point qui est aussi un point d'inflexion.*

Notamment, *si deux asymptotes d'une cubique sont d'inflexion, la troisième asymptote est aussi d'inflexion.*

4. Il existe relativement aux courbes de la troisième classe des théorèmes qui se déduisent des précédents par application du principe de dualité. Il suffit de les indiquer. Notamment, on a le théorème suivant :

Si deux des trois tangentes menées d'un point à une courbe de la troisième classe sont de rebroussement, il en est de même de la troisième.

5. Génération des cubiques, dite de Mac-Laurin. — Théorème. — *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* O *aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel est une cubique.*

Cherchons combien il y a de points du lieu sur une droite quelconque L. Soit M un point du lieu sur cette droite. La droite OM rencontre la conique du faisceau linéaire ponctuel qui passe par O en un second point I et une autre conique S de ce faisceau en deux points A et A′. D'après le théorème de Desargues, le point M est un point double de l'involution qui contient les deux couples de points O et I, A et A′. Cela posé, considérons le faisceau linéaire ponctuel qui contient la conique S précédente et la conique décomposée en la droite double L. La conique de ce second faisceau linéaire qui passe en O passe aussi par I. Le point I est ainsi à l'intersection des coniques qui appartiennent aux deux faisceaux linéaires précédents et qui passent par O. Ces deux coniques ont, outre le point O, trois points communs tels que I, d'où il résulte que la droite L rencontre le lieu en trois points. Ce lieu est donc une cubique.

1° Supposons que les coniques données aient quatre points communs distincts A, B, C, D et que le point O ne soit pas situé sur un des côtés du quadrangle ABCD. Sur toute droite Δ passant par O, il existe deux points variables du lieu qui sont les points doubles M et M′ de l'involution formée par les couples de points d'intersection de la sécante Δ avec les coniques données. Le troisième point du lieu situé sur une telle droite Δ ne peut être que le point O, comme on le voit d'ailleurs directement en faisant coïncider Δ avec la tangente en O à la conique Σ du faisceau linéaire donné qui passe par O. Pour cette position particulière de Δ, un des points M et M′ coïncide avec O, et l'on voit ainsi que la tangente en O à la cubique coïncide avec la tangente en O à la conique Σ.

Si la droite Δ, qui varie en passant constamment par O, coïncide avec la droite OA, les points M et M′ se confondent avec A. D'autre part, soient P, Q, R les points de rencontre des droites AB et CD, AC et DB, AD et BC; si la droite Δ coïncide avec OP, un des points M et M′ est confondu avec P.

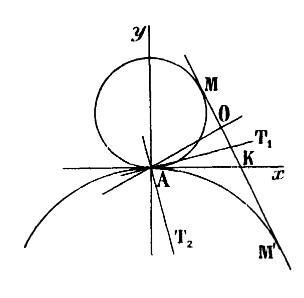
On voit ainsi que la cubique passe par les points P, Q, R et les points A, B, C, D ; les points A, B, C, D sont simples, et les tangentes en ces points sont les droites OA, OB, OC, OD. Les droites OA, OB, OC, OD sont les seules positions de la droite Δ, variant en passant constamment par O, pour lesquelles les points M et M′ soient confondus ; par suite, la cubique n'a pas de point double.

Si le point O est situé sur le côté AB du quadrangle précédent et est distinct de P, la cubique se décompose en la droite AB et une conique proprement dite qui passe par les points C, D, Q et R, les tangentes en C et D étant les droites OC et OD. Enfin, si le point

O coïncide avec P, la cubique se décompose en les trois droites AB, CD et QR.

2° Supposons que les coniques données soient tangentes en A et se rencontrent en deux autres points B et C. Supposons en outre que O ne soit situé ni sur la tangente en A aux coniques données, ni sur un côté du triangle ABC. La cubique passe par les points A, B, C et par le point P de rencontre de BC et de la tangente en A aux coniques données. Montrons que A est un point double du lieu. A cet effet, coupons le lieu par une droite L passant par A. Pour obtenir les points M du lieu situés sur cette droite, considérons celle des coniques données qui passe par O et la conique qui passe par O dans le faisceau linéaire qui contient une autre conique donnée et la conique décomposée en la droite double L. Ces deux coniques sont tangentes en A et elles ont, outre les points A et O, un point commun I, d'où il résulte que la droite L rencontre le lieu en un seul point variable M ; le point A est un point double de la cubique.

Sur toute droite Δ passant par O, il existe deux points du lieu ; ce sont les points doubles de l'involution qui contient le couple des points d'intersection α et β de Δ avec les droites AB et AC et le couple des points d'intersection α_1 et β_1 de Δ respectivement avec les droites AP et BC. Les droites AM et AM′ sont les rayons doubles de l'involution qui contient le couple des droites AB et AC et le couple des droites AP et $A\alpha_1$. Quand la droite Δ passe par A, les droites AM et AM′ deviennent les rayons doubles de l'involution qui contient le couple des droites AB et AC et le couple des droites AO et AP ; les droites sont alors les tangentes au point double de la cubique ; elles sont distinctes.



En outre, la cubique passe par B et C, qui sont simples, les tangentes en B et C étant les droites OB et OC.

Si le point O est situé sur la droite AP ou sur un des côtés du triangle ABC, le lieu se décompose.

Par application de ce qui précède, considérons les cercles qui sont tangents en un point fixe A à une droite fixe Ax. Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe O à ces cercles est une cubique qui passe par les points cycliques, les asymp-

totes isotropes se coupant au point O, dit *foyer singulier* de la cubique ; cette cubique admet le point A comme point double, les tangentes en ce point étant les bissectrices AT_1 et AT_2 de l'angle des droites Ax et AO ; ces tangentes sont rectangulaires. La cubique est dite une *strophoïde*.

Sur toute droite Δ passant par O, il existe deux points variables M et M′ du lieu. K étant le point d'intersection de Δ avec Ax, on a

$$KA = KM = KM'.$$

Donc le cercle de diamètre MM′ passe par A et est tangent en A à la droite Ay perpendiculaire à Ax. On a ainsi le théorème suivant :

Le lieu des points de rencontre d'un cercle variable tangent à une droite fixe en un point fixe A avec le diamètre de ce cercle qui passe par un point fixe O non situé sur le lieu du centre du cercle variable est une strophoïde admettant le point A comme point double et le point O comme foyer singulier.

3° Supposons que les coniques données soient osculatrices en un point A et se rencontrent en un autre point B. Supposons en outre que O ne soit situé ni sur la tangente AT en A à ces coniques ni sur la droite AB.

La cubique admet encore le point A comme point double, les tangentes en ce point étant encore les rayons doubles de l'involution qui contient le couple des droites AT et AB et le couple des droites AT et AO. Cette involution est singulière, et ses deux rayons doubles sont confondus avec la droite AT. Ainsi, le point A est point de rebroussement de la cubique.

La cubique passe aussi par B, qui est simple, la tangente en ce point étant la droite OB.

6. Corrélativement, on a les résultats suivants :

L'enveloppe des tangentes aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel dont les points de contact sont situés sur une droite Δ est une courbe de la troisième classe.

Si les coniques données ont quatre tangentes communes distinctes, l'enveloppe est sans tangente double. Si les coniques sont tangentes en un même point à une même droite, cette droite est tangente double de l'enveloppe. Plus particulièrement, si les coniques sont osculatrices en un même point, leur tangente commune en ce point est tangente d'inflexion de l'enveloppe, le point considéré étant point d'inflexion.

Par exemple, *l'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau linéaire tangentiel est une courbe de la troisième classe tangente à la droite à l'infini.*

7. **Théorème.** — *Étant données trois coniques* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *n'appartenant pas à un même faisceau linéaire ponctuel, le lieu d'un point* M *tel que ses polaires par rapport aux trois coniques concourent en un point* M′ *est une cubique qui est aussi le lieu du point* M′, *et l'enveloppe de la droite* MM′ *est une courbe de la troisième classe.*

1° Cherchons combien il existe de points du lieu situés sur une droite quelconque L.

M étant un point variable de L, le lieu du point de rencontre M_1 des polaires de M par rapport aux coniques Γ_1 et Γ_3 est une conique S_1 qui passe par le pôle I de L par rapport à la conique Γ_3 (III, § 3); de même, le lieu du point de rencontre M_2 des polaires de M par rapport aux coniques Γ_2 et Γ_3 est une conique S_2 qui passe aussi par I. Pour que M soit un point du lieu cherché situé sur L, il faut et il suffit que M_1 et M_2 se confondent en un point d'intersection M′, autre que I, des coniques S_1 et S_2. Ces deux coniques ayant trois points communs M′ autres que I, il existe trois points M du lieu cherché sur la droite L. Le lieu cherché est donc une cubique Σ.

Si les polaires d'un point M par rapport aux trois coniques données concourent en un point M′, les polaires de M′ par rapport à ces coniques concourent en M. La cubique Σ est par suite aussi le lieu du point de concours M′ des polaires d'un point M variable sur Σ par rapport aux coniques données. Nous dirons que les points M et M′ sont *conjugués* sur la cubique Σ.

2° Cherchons combien il passe de droites MM′ par un point quelconque P.

Soient Γ'_1 la conique qui passe par P et qui appartient au faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_1 et Γ_3, et Γ'_2 la conique qui passe par P et qui appartient au faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et Γ_3. Les points M et M′, étant conjugués par rapport à Γ_1 et à Γ_3, sont aussi conjugués par rapport à Γ'_1; si la droite MM′ passe par P, le conjugué harmonique P′ de P par rapport aux points M et M′ est situé sur Γ'_1. De même, ce point P′ est situé sur Γ'_2; il est donc un des trois points autres que P d'intersection des coniques Γ'_1 et Γ'_2. Réciproquement, toute droite joignant le point P à un point P′, autre que P, commun aux deux coniques Γ'_1 et Γ'_2 est une droite MM′. En effet, les deux involutions formées sur la droite PP′ par les couples de points d'intersection de cette droite avec les coniques

du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_1 et Γ_3 et par les couples de points d'intersection de la droite avec les coniques du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3 sont coïncidentes, comme ayant en commun le couple des points P et P' et le couple des points d'intersection de PP' avec Γ_3. Il s'ensuit que les points doubles M et M' de ces deux involutions sont conjugués par rapport à chacune des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3, et qu'ainsi la droite PP' est une tangente à l'enveloppe cherchée. Cette enveloppe est donc une courbe de la troisième classe Σ'.

Ce qui précède montre que la courbe Σ' est l'enveloppe d'une droite qui rencontre les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 en trois couples de points appartenant à une même involution, et que la courbe Σ est le lieu des points doubles de cette involution.

8. 1° Les deux courbes Σ et Σ' ne changent pas si on remplace les deux coniques Γ_2 et Γ_3 par deux coniques quelconques Γ'_2 et Γ'_3 du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3. En effet, le point de rencontre des polaires d'un point par rapport aux coniques Γ_2 et Γ_3 est aussi le point de rencontre des polaires de ce point par rapport aux coniques Γ'_2 et Γ'_3 (III, § 3). Si donc les polaires d'un point M par rapport aux coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont concourantes en un point M', les polaires de ce point par rapport aux coniques Γ_1, Γ'_2, Γ'_3 sont aussi concourantes au point M', et réciproquement.

2° La courbe Σ' est l'enveloppe des sécantes communes à la conique Γ_1 et aux coniques du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3. En effet, une tangente Δ à la courbe Σ' rencontre Γ_1 en un couple de points qui fait partie de l'involution formée par les couples de points d'intersection avec Δ des coniques du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3 ; il existe donc une conique de ce faisceau qui rencontre Δ aux mêmes points que Γ_1. Et réciproquement.

3° La courbe Σ est le lieu des points qui ont même polaire par rapport à Γ_1 et par rapport à une conique du faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et Γ_3. En effet, la polaire unique d'un tel point M par rapport à Γ_1 et par rapport à une conique du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3 passe par le point de rencontre des polaires de M par rapport aux coniques Γ_2 et Γ_3. Réciproquement, M étant un point dont les polaires par rapport à Γ_1, Γ_2, Γ_3 concourent en un point M', il existe une conique du faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et Γ_3 qui est telle que la polaire de M par rapport à cette conique coïncide avec la polaire de M par rapport à Γ_1.

On peut dire aussi que la courbe Σ est le lieu des points doubles des coniques décomposées en deux droites qui font partie des divers faisceaux linéaires ponctuels qui contiennent Γ_1 et une conique variable du faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et Γ_3.

La courbe Σ' est l'enveloppe des droites qui constituent ces coniques décomposées. A toute tangente Δ à la courbe Σ' il correspond une tangente Δ' à Σ' qui est telle que la conique décomposée en les deux droites Δ et Δ' fasse partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_1 et une conique du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3. La correspondance entre Δ et Δ' est réciproque; nous dirons que Δ et Δ' sont des tangentes *conjuguées* à la courbe Σ'.

9. Soient

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0, \qquad f_3(x, y, z) = 0$$

les équations homogènes des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3. On voit immédiatement que les coniques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_1 et une conique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3 ont pour équation générale

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) + \lambda_3 f_3(x, y, z) = 0,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant trois constantes arbitraires non simultanément nulles. La forme même de cette équation montre que les coniques précédentes coïncident avec les coniques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et une conique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_3 et Γ_1 et coïncident aussi avec les coniques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_3 et une conique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_1 et Γ_2. On désigne l'ensemble de ces coniques Γ sous le nom de *réseau linéaire ponctuel*. Cet ensemble contient les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3, qui sont dites *coniques de base*. On voit facilement que le réseau linéaire ponctuel considéré ne change pas si l'on remplace les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 par trois autres coniques du réseau prises comme nouvelles coniques de base, ces trois nouvelles coniques n'appartenant pas à un même faisceau linéaire.

La courbe Σ est le lieu des points doubles des coniques décomposées en deux droites qui appartiennent au réseau; elle est dite la *hessienne* du réseau. La courbe Σ' est l'enveloppe des droites qui font partie des coniques décomposées du réseau; elle est dite la *cayleyenne* du réseau.

10. Cas particuliers. — 1° Supposons que les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 aient un point commun O. Toutes les coniques du réseau linéaire passent par O. Une droite passant par O rencontre les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 en trois couples de points ayant en commun le point O ; ces trois couples de points font partie d'une même iuvolution, dite singulière, dont les deux points doubles sont confondus en O. On voit donc que toute droite passant par O est tangente à la cayleyenne ; la cayleyenne se décompose en le point O et en une courbe de la seconde classe σ'.

Les polaires de O par rapport aux coniques Γ concourent en O ; le point O est un point de la hessienne, et il coïncide avec son conjugué. Montrons que O est un point double de la hessienne. A cet effet, cherchons les points d'intersection de cette cubique avec une droite arbitraire L passant par O. Soient la conique S_1 lieu des pôles de L par rapport aux coniques du faisceau linéaire qui contient Γ_1 et Γ_3, et la conique S_2 lieu des pôles de L par rapport aux coniques du faisceau linéaire qui contient Γ_2 et Γ_3. Parmi les coniques du premier faisceau, il en existe une, Γ', qui est tangente en O à L ; le point O est donc un point de S_1. En outre, quand une conique Γ varie dans ce faisceau en tendant vers Γ', la tangente en O à Γ, qui passe par le pôle de L par rapport à Γ, tend vers L. Donc la conique S_1 est tangente en O à L. Il en est de même de la conique S_2. Comme ces deux coniques passent toutes deux par le pôle I de L par rapport à Γ_3 et se rencontrent en un autre point M' distinct de O et de I, on voit qu'il existe un seul point M variable d'intersection de la droite L avec la hessienne ; il s'ensuit que O est une point double de cette courbe.

Soit à déterminer les tangentes en O à la hessienne. Parmi les coniques du réseau, il en existe une γ qui appartient au faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_2 et Γ_3 et qui est tangente en O à Γ_1, et il en existe une qui est formée de deux droites D et D' passant par O et qui appartient au faisceau linéaire contenant Γ_1 et γ. Pour ne pas changer les notations, nous pouvons supposer que cette conique décomposée est prise comme conique Γ_3. La droite D rencontre les coniques Γ_1 et Γ_2 respectivement aux points A_1 et A_2 autres que O. m étant un point de la hessienne situé sur D, son conjugué m' est nécessairement situé sur D, qui est la polaire de m par rapport à Γ_3 ; les points m et m' sont alors les points doubles de l'involution qui contient les deux couples de points O et A_1, O et A_2 ; cette involution est singulière et par suite m coïncide avec O. Ainsi, la droite D et de même la droite D' rencontrent la hessienne au seul point O ; ce sont les tangentes en O à la hessienne.

D'autre part, M et M' étant deux points conjugués de la hessienne, les droites OM et OM' sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites D et D'. Quand M varie sur la cubique et tend vers O de façon que OM tende vers D, M' tend aussi vers O de façon que OM' tende vers D. La droite MM', qui est constamment tangente à la conique σ', tend elle-même vers D. On voit ainsi que les tangentes en O à la hessienne sont les tangentes menées de O à la conique σ', qui constitue avec le point O la cayleyenne.

2° Supposons que les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 aient deux points communs O et O'. Toutes les coniques du réseau linéaire passent par ces deux points. Les polaires d'un point M quelconque de la droite OO' par rapport aux coniques Γ concourent au point M', conjugué harmonique de M par rapport aux points O et O'. La droite OO' fait donc partie de la hessienne ; la hessienne se décompose en la droite OO' et en une courbe du second degré, σ, qui passe par les points O et O', ces points étant points doubles de la hessienne.

Toute droite passant par O ou par O' rencontre les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 en trois couples de points en involution. La cayleyenne se décompose en les deux points O et O' et en un troisième point ω. Si un point M varie sur la conique σ, son conjugué M' varie aussi sur σ, et la droite MM' passe par le point fixe ω. Quand M vient en O ou O', le point M' vient aussi en O ou O', la droite MM' se confond alors avec la tangente en O ou O' à σ. On voit ainsi que le point ω est le pôle de la droite OO' par rapport à σ.

Les sécantes communes aux coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui ne passent ni par O ni par O' passent par ω. On a donc le théorème suivant :

Si trois coniques ne faisant pas partie d'un même faisceau linéaire ponctuel ont deux points communs O *et* O', *les trois sécantes communes qui ne passent ni par* O *ni par* O' *sont concourantes.*

Par continuité, ce théorème s'applique à trois coniques ne faisant pas partie d'un même faisceau linéaire ponctuel qui sont tangentes entre elles en un même point O.

Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient une conique Γ, *deux points* O *et* O' *sur cette conique et deux points* A *et* B *non situés sur cette conique. Une conique variable* Γ' *passant par* O, O', A, B *rencontre* Γ *en deux points variables* P *et* Q ; *la droite* PQ *passe par un point fixe situé sur la droite* AB.

Énoncé sous cette forme, il apparaît comme une conséquence du théorème de Desargues. En effet, la droite AB rencontre Γ', Γ et la conique formée des deux droites OO' et PQ en trois couples de

points qui font partie d'une même involution. Les couples de points d'intersection de AB avec Γ et Γ' étant fixes, cette involution est fixe, et comme le point d'intersection de la droite AB avec la droite OO' est fixe, il en est de même du point d'intersection de la droite AB avec la droite PQ.

Supposons que les points O et O' soient les points cycliques; les coniques Γ sont alors des cercles. La conique σ est aussi un cercle, qui a pour centre le point ω. Deux points M et M' conjugués sur ce cercle sont diamétralement opposés ; il s'ensuit que le cercle σ est orthogonal aux cercles Γ.

On a, en particulier, le théorème suivant :

Étant donnés trois cercles qui n'appartiennent pas à un même faisceau linéaire ponctuel, le lieu des points M *dont les polaires par rapport à ces trois cercles sont concourantes est constitué par la droite à l'infini et par le cercle orthogonal aux trois cercles donnés.*

3° Supposons que la conique Γ_3 se décompose en deux droites confondues en une seule droite D.

La polaire par rapport à Γ_3 d'un point M quelconque de D, étant indéterminée, peut être regardée comme passant par le point de rencontre des polaires de M par rapport aux coniques Γ_1 et Γ_2. Il s'ensuit que la hessienne se décompose en la droite D et en une conique σ. Soient A et B les points d'intersection d'une conique Γ du réseau avec la droite D. Le couple des tangentes en A et B à Γ est une conique décomposée du réseau ; le point de rencontre de ces tangentes est un point de σ. On voit ainsi qu'il existe une conique σ lieu des pôles de D par rapport aux coniques du réseau ; en particulier, cette conique est le lieu des pôles de D par rapport aux coniques du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_1 et Γ_2.

La droite D, qui fait partie d'une conique décomposée du réseau, est tangente à la cayleyenne ; elle coïncide avec sa conjuguée. Montrons qu'elle est tangente double de la cayleyenne. A cet effet, cherchons les tangentes à la cayleyenne, autres que D, qui passent par un point P de D. Une telle droite Δ rencontre les coniques Γ_1. Γ_2, Γ_3 en trois couples de points qui appartiennent à une même involution ; l'un des points doubles de cette involution est P ; l'autre est nécessairement le point P' d'intersection des polaires λ_1 et λ_2 de P par rapport à Γ_1 et à Γ_2. Il en résulte que de P on ne peut mener qu'une tangente à la cayleyenne, autre que D ; la droite D est donc une tangente double.

Les coniques Γ rencontrent la droite D en des couples de points qui appartiennent à une même involution. Si le point P de D varie en tendant vers un des deux points doubles I et J de cette involution,

le point P′ tend vers ce même point, et la droite PP′ tend vers D. De là résulte que les points de contact de la droite D avec la cayleyenne sont les points I et J.

Les tangentes à une conique Γ en ses points d'intersection avec D forment une conique décomposée du réseau ; elles sont donc tangentes à la cayleyenne. Cette courbe est en particulier l'enveloppe des tangentes aux coniques du faisceau linéaire ponctuel qui contient Γ_1 et Γ_2 en leurs points d'intersection avec la droite D.

En supposant que la droite D soit la droite à l'infini, on a le théorème suivant :

L'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau linéaire ponctuel est une courbe de la troisième classe, en général indécomposable, bitangente à la droite à l'infini, les deux points de contact étant les points doubles de l'involution formée par les couples de points d'intersection de la droite à l'infini avec les coniques considérées.

Si les coniques sont toutes des hyperboles équilatères, les points de contact de la courbe avec la droite à l'infini sont les points cycliques. Nous retrouverons plus loin la courbe sous le nom d'*hypocycloïde à trois rebroussements.*

Les hyperboles équilatères qui sont circonscrites à un triangle T passent par l'orthocentre de ce triangle ; elles forment un faisceau linéaire ponctuel de coniques, et l'enveloppe de leurs asymptotes est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Soient une hyperbole équilatère H circonscrite au triangle T, une asymptote Δ de cette hyperbole et la parabole P inscrite au triangle T et tangente à la droite à l'infini au point ω à l'infini dans la direction des perpendiculaires à Δ. Il existe une infinité de triangles inscrits à H et circonscrits à P ; parmi ces triangles, il en existe un qui a un sommet en ω ; les côtés de ce triangle qui passent par ω sont confondus avec la droite à l'infini ; cette droite rencontre l'hyperbole au point à l'infini dans la direction de Δ ; le troisième côté du triangle est donc l'asymptote Δ, qui est ainsi la tangente au sommet de la parabole P. Par suite, *l'enveloppe des tangentes au sommet des paraboles P inscrites à un triangle T est une hypocycloïde à trois rebroussements, qui coïncide avec l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle.*

Le lieu des foyers des paraboles P est, comme nous l'avons vu, le cercle circonscrit au triangle T. La tangente au sommet d'une parabole P joint les pieds des perpendiculaires abaissées de son foyer sur les côtés du triangle ; c'est donc une droite de Simson du triangle. Ainsi, *l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

11. Théorèmes corrélatifs. — 1° En appliquant le principe de dualité aux résultats établis dans les paragraphes 7, 8, 9 et 10, on obtient les énoncés suivants :

α. *Étant données trois coniques* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *n'appartenant pas à un même faisceau linéaire tangentiel, l'enveloppe d'une droite* Δ *telle que ses pôles par rapport aux trois coniques soient situées sur une même droite* Δ' *est une courbe de la troisième classe* Σ', *qui est aussi l'enveloppe de* Δ', *et le lieu du point de rencontre* M *des droites* Δ *et* Δ' *est une courbe du troisième degré* Σ.

Les droites Δ et Δ' sont dites *tangentes conjuguées* à la courbe Σ'.

β. *La cubique* Σ *est le lieu d'un point* M *tel que les trois couples de tangentes menées de* M *aux coniques* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *appartiennent à une même involution. La courbe de la troisième classe* Σ' *est l'enveloppe des droites doubles de cette involution.*

2° Il existe une infinité de coniques Γ dont chacune fait partie d'un faisceau linéaire tangentiel contenant une des trois coniques données et une conique du faisceau linéaire tangentiel qui contient les deux autres coniques données. Si

$$\varphi_1(u, v, w) = 0, \qquad \varphi_2(u, v, w) = 0, \qquad \varphi_3(u, v, w) = 0$$

sont les équations tangentielles des trois coniques données, l'équation tangentielle générale des coniques Γ est

$$\mu_1\varphi_1(u, v, w) + \mu_2\varphi_2(u, v, w) + \mu_3\varphi_3(u, v, w) = 0,$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois constantes arbitraires non simultanément nulles. On désigne l'ensemble de ces coniques Γ sous le nom de *réseau linéaire tangentiel*.

La cubique Σ est le lieu des points qui forment les coniques décomposées du réseau ; elle est dite la *hessienne* du réseau. Les points de la hessienne qui forment une même conique décomposée du réseau sont dits *conjugués*. La courbe de la troisième classe Σ' est l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués de la hessienne ; elle est dite la *cayleyenne* du réseau.

Comme application, considérons le réseau linéaire tangentiel qui contient deux coniques Γ_1 et Γ_2 non homofocales et la conique décomposée en les deux points cycliques. La hessienne du réseau est une cubique qui passe par les points cycliques ; elle est le lieu des foyers des coniques du réseau. La cayleyenne est une courbe de la troisième classe tangente à la droite à l'infini ; elle est l'enveloppe des axes des coniques du réseau.

On démontre qu'il existe une infinité de coniques, proprement dites ou décomposées en deux points, qui sont harmoniquement inscrites à toutes les coniques d'un réseau linéaire ponctuel et que ces coniques forment un réseau linéaire tangentiel. Ce réseau linéaire tangentiel est dit *conjugué* du réseau linéaire ponctuel. Toute conique du réseau linéaire ponctuel est harmoniquement circonscrite à chacune des coniques du réseau linéaire tangentiel.

Corrélativement, il existe une infinité de coniques, proprement dites ou décomposées en deux droites, qui sont harmoniquement circonscrites à toutes les coniques d'un réseau linéaire tangentiel ; ces coniques forment un réseau linéaire ponctuel, qui est dit *conjugué* du réseau linéaire tangentiel. Toute conique du réseau linéaire tangentiel est harmoniquement inscrite à chacune des coniques du réseau linéaire ponctuel.

Deux réseaux linéaires conjugués, l'un ponctuel, l'autre tangentiel, ont même hessienne et même cayleyenne.

3° Si les coniques d'un réseau linéaire tangentiel sont tangentes à une même droite D, la hessienne se décompose en cette droite et en une conique σ, et la droite est une tangente double de la cayleyenne. Parmi les coniques du réseau, il en existe une décomposée en deux points P et Q situés sur D. Ces deux points sont les deux points d'intersection de D avec la conique σ et les deux points de contact de D avec la cayleyenne.

Comme application, considérons deux paraboles non homofocales Γ_1 et Γ_2. Il existe un réseau linéaire tangentiel contenant ces deux coniques et la conique décomposée en les deux points cycliques I et J ; toutes les coniques proprement dites du réseau sont des paraboles. La hessienne du réseau se décompose en la droite à l'infini et en une conique σ qui passe par les points cycliques et est par suite un cercle. *Ce cercle est le lieu des foyers des coniques du réseau.* On voit ainsi, en particulier, que le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle. D'autre part, la cayleyenne est une courbe de la troisième classe bitangente à la droite à l'infini, les deux points de contact étant les points cycliques. Nous avons déjà rencontré et nous retrouverons plus loin cette courbe sous le nom d'hypocycloïde à trois rebroussements. Cette courbe est l'enveloppe des axes des paraboles du réseau. On voit ainsi, en particulier, que *l'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Si les coniques d'un réseau linéaire tangentiel sont tangentes à deux droites D et D′ se rencontrant en un point O, la cayleyenne se décompose en le point O et en une courbe de la seconde classe σ,

la hessienne se décompose en les deux droites D et D′ et en une troisième droite Δ, qui est la polaire de O par rapport à σ.

Si un réseau linéaire tangentiel contient une conique décomposée en deux points confondus en un point O, la cayleyenne se décompose en ce point O et en une courbe de la seconde classe σ. Cette conique σ est l'enveloppe des polaires de O par rapport aux coniques du réseau ; les tangentes menées de O à σ sont les droites doubles D_1 et D_2 de l'involution formée par les couples de tangentes menées de O aux coniques du réseau. La hessienne admet le point O comme point double, les tangentes en O étant les deux droites D_1 et D_2; elle est le lieu des points de contact des tangentes menées de O aux coniques du réseau.

Comme application, considérons deux coniques homofocales Γ_1 et Γ_2 et un point O distinct des points cycliques et des foyers des deux coniques. Il existe un réseau linéaire tangentiel contenant les coniques Γ_1 et Γ_2 et la conique décomposée en deux points confondus en O. La cayleyenne est décomposée en le point O et en une conique σ qui est tangente à la droite à l'infini et qui est ainsi une parabole. La hessienne est une cubique, en général indécomposable, qui admet le point O comme point double, les tangentes en ce point étant les droites doubles de l'involution formée par les couples de tangentes menées de O aux coniques homofocales aux coniques Γ_1 et Γ_2; ces tangentes sont rectangulaires. D'autre part, le couple des points cycliques constitue une conique singulière du réseau ; la hessienne passe donc par les points cycliques. Nous avons déjà rencontré (5) et nous retrouverons plus loin une telle courbe sous le nom de strophoïde.

Les coniques homofocales à Γ_1 font partie du réseau linéaire tangentiel ; on voit d'après cela que *le lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe O à des coniques homofocales est une strophoïde* et que *l'enveloppe des polaires du point O par rapport à ces coniques est une parabole.* Soient d'autre part A et B les deux points de contact des tangentes menées par O à Γ_1; les coniques bitangentes à Γ_1 aux deux points A et B font aussi partie du réseau linéaire tangentiel; on voit d'après cela que *le lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique donnée en deux points donnés est, en général, une strophoïde* et que *l'enveloppe des axes de ces coniques est, en général, une parabole.*

Si l'on suppose que le point O soit situé sur un axe des coniques Γ_1 et Γ_2 ou sur la droite à l'infini, la hessienne se décompose en une droite et en une conique. Notamment,

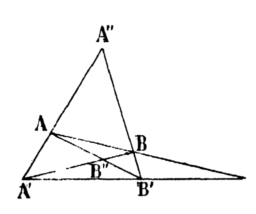
Le lieu des points de contact des tangentes à des coniques homofocales

qui sont parallèles à une droite donnée est formé de la droite à l'infini et d'une hyperbole équilatère.

On a aussi le théorème suivant :

Le lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites parallèles en deux points donnés est une hyperbole équilatère.

12. Soit un réseau linéaire tangentiel ayant pour hessienne une cubique proprement dite. Considérons deux points A et B conjugués sur cette courbe. Un point A′ de la cubique infiniment voisin de A a pour conjugué un point B′ de la cubique infiniment voisin de B. Soient A″ le point de rencontre des droites AA′ et BB′ et B″ le point de rencontre des droites AB′ et BA′. La conique formée des deux points A″ et B″ fait partie du faisceau linéaire tangentiel qui contient les deux coniques formées l'une des deux points A et B, l'autre des deux points A′ et B′. Ces deux dernières coniques appartenant au réseau linéaire tangentiel, il en est de même de la première, et ainsi les points A″ et B″ sont deux points conjugués de la hessienne.



Fixons A et B et faisons tendre A′ et B′ respectivement vers A et B ; le point A″ tend vers le point de rencontre des tangentes en A et B à la hessienne, et le point B″ tend vers le point d'intersection, autre que A et B, de la hessienne avec la droite AB. On a ainsi le théorème suivant :

Les tangentes à la hessienne en deux points conjugués se rencontrent sur cette courbe en un point dont le conjugué est le troisième point d'intersection de la hessienne avec la droite qui joint les deux points conjugués considérés.

Ce théorème admet un théorème corrélatif concernant les tangentes conjuguées à la cayleyenne d'un réseau linéaire ponctuel.

En particulier, considérons le réseau linéaire tangentiel qui contient deux coniques Γ_1 et Γ_2 non homofocales et la conique décomposée en les deux points cycliques. La hessienne du réseau passe par les points cycliques, qui sont conjugués sur la courbe. Les tangentes en ces points se rencontrent en un point φ, qui est dit *foyer*

singulier de la cubique circulaire. On voit ainsi que la hessienne est une cubique circulaire qui passe par son foyer singulier. Ce foyer singulier φ est conjugué sur la cubique du point à l'infini dans la direction asymptotique réelle de la cubique ; il s'ensuit que la tangente en φ à la cubique passe par le point à distance finie de rencontre de la cubique avec son asymptote réelle.

CHAPITRE VIII

CUBIQUES A POINT DOUBLE
ET COURBES DE LA TROISIÈME CLASSE A TANGENTE DOUBLE

---

1. Soit une cubique Σ ayant un point double O à tangentes distinctes Ox et Oy. On a le théorème suivant :

Si M et M_1 sont les points d'intersection variables de la cubique avec une droite passant par un point fixe P de la cubique, les couples de droites telles que OM et OM_1 appartiennent à une même involution qui contient le couple des tangentes au point double.

On a la démonstration sommaire suivante. A la droite OM il correspond une droite OM_1 et une seule, et inversement ; en outre, quand la droite OM prend la position de OM_1, la droite OM_1 prend la position de OM. Il s'ensuit que les droites OM et OM_1 se correspondent involutivement.

On peut aussi ramener ce théorème au théorème de Frégier relatif aux coniques. Soit une transformation quadratique définie au moyen d'un faisceau linéaire ponctuel de coniques Γ parmi lesquelles se trouvent trois coniques distinctes décomposées en deux droites ayant respectivement pour points doubles le point O, le point P et un autre point Q de la cubique Σ. Cette transformation transforme la cubique en une conique Σ' passant par O et ne passant ni par P ni par Q, une droite variable passant par P et rencontrant Σ en deux points variables M et M_1 en une droite passant par P et rencontrant Σ' en deux points variables M' et M'_1. D'après le théorème de Frégier, les droites OM' et OM'_1 se correspondent involutivement. Soient Δ et Δ' les sécantes communes aux coniques Γ qui passent par O. Les droites OM et OM', OM_1 et OM'_1 sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δ et Δ' ; il s'ensuit que les droites OM et OM_1 se correspondent involutivement.

L'un des couples de l'involution est formé par les tangentes Ox et Oy en O à Σ.

Théorème réciproque. — *Si deux droites variables passant par* O *et rencontrant* Σ *en deux points variables* M *et* M_1 *se correspondent en involution, et si en outre les tangentes au point double sont deux positions correspondantes de ces droites, la droite* MM_1 *passe par un point fixe* P *de la cubique.*

Soient en effet Om et Om_1 deux positions correspondantes des droites variables OM et OM_1, m et m_1 leurs points d'intersection avec Σ, P le troisième point d'intersection avec la cubique de la droite mm_1. Si on mène par P une sécante variable, les droites qui joignent le point O aux deux points d'intersection variables avec Σ se correspondent en involution. Les deux correspondances involutives ont en commun le couple des droites Ox et Oy et le couple des droites Om et Om_1; donc elles coïncident, et la droite MM_1 passe constamment par le point P.

Les droites doubles de l'involution formée par les couples de droites OM et OM_1 sont les droites qui joignent le point O aux points de contact des tangentes à Σ, autres que la tangente en P, menées par le point P. On voit ainsi que d'un point P quelconque de Σ on peut mener deux tangentes à Σ autres que la tangente en P. Soient A et A′ les points de contact de ces tangentes; les droites OA et OA′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Ox et Oy.

Nous dirons que deux points M et M′ d'une cubique ayant un point double O à tangentes distinctes sont *conjugués* sur la courbe lorsque les droites OM et OM′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes en O. Les tangentes à la cubique en deux points conjugués se rencontrent en un point situé sur la cubique.

2. Définition. — Soit une droite fixe arbitraire Oz, autre que Ox et Oy. M étant un point de Σ, nous poserons

$$R = (Ox, Oy, OM, Oz).$$

A chaque position de M il correspond une valeur de R, et, réciproquement, à toute valeur de R il correspond un point M et un seul de Σ tel que l'égalité précédente ait lieu. Nous désignerons le rapport anharmonique R sous le nom de *paramètre du point* M *sur la cubique* Σ.

Quand OM coïncide avec Ox, R est nul, et quand OM coïncide avec Oy, R est infini. Le point double O de Σ a deux paramètres, qui sont o et ∞.

Théorème. — *Le produit des paramètres* R *et* R_1 *des points variables* M *et* M_1 *d'intersection de* Σ *avec une droite variable passant par un point fixe* P *de* Σ *est constant.*

Pour démontrer ce théorème, considérons la transformation quadratique précédemment définie. I étant le point d'intersection autre que O de la droite Oz avec Σ, nous prendrons comme point singulier Q de la transformation le point d'intersection autre que P et I de la droite PI avec Σ. Les droites qui joignent le point O à un point quelconque M de Σ et à son transformé M' sur Σ' sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δ et Δ' ; il en résulte que la conique Σ' a pour tangente en O la droite Oz' conjuguée harmonique de Oz par rapport aux droites Δ et Δ' et que les tangentes Ox et Oy en O à Σ sont respectivement conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δ et Δ' des droites qui joignent le point O aux points d'intersection α et β de la conique Σ' et de la droite PQ.

Cela posé, M' et M'_1 étant les transformés sur Σ' des points M et M_1 sur Σ, on a

$$R = (Ox, Oy, OM, Oz) = (O\alpha, O\beta, OM', Oz'),$$
$$R_1 = (Ox, Oy, OM_1, Oz) = (O\alpha, O\beta, OM'_1, Oz'),$$

et par suite

$$RR_1 = (O\alpha, O\beta, OM', Oz') . (O\alpha, O\beta, OM'_1, Oz').$$

Or, I' étant le point d'intersection de la droite Oz' avec la droite $\alpha\beta$, nous avons montré (I, § 1) que l'on a l'égalité

$$(O\alpha, O\beta, OM', Oz') . (O\alpha, O\beta, OM'_1, Oz') = (\alpha\beta PI');$$

on a donc

$$RR_1 = (\alpha\beta PI') = \text{const.}$$

Théorème. — *Le produit des paramètres des points de rencontre de la cubique avec une droite variable est constant.*

Soient deux droites Δ et Δ' rencontrant respectivement Σ aux points M_1, M_2, M_3, de paramètres R_1, R_2, R_3, et aux points M'_1, M'_2, M'_3, de paramètres R'_1, R'_2, R'_3. Considérons le point μ, de paramètre ρ, d'intersection, autre que M_1 et M'_1, de la droite $M_1M'_1$ avec Σ. D'après le théorème précédent, on a

$$R_2R_3 = \rho R'_1, \qquad R'_2R'_3 = \rho R_1,$$

d'où $$R_1R_2R_3 = \rho R_1R'_1, \qquad R'_1R'_2R'_3 = \rho R_1R'_1,$$

et par suite $$R_1R_2R_3 = R'_1R'_2R'_3.$$

Nous désignerons par C la valeur constante non nulle et non infinie du produit $R_1R_2R_3$ des paramètres des points de rencontre de Σ avec une droite quelconque.

Réciproquement, si le produit des paramètres R_1, R_2, R_3 de trois points M_1, M_2, M_3 de Σ est égal à C, les trois points sont en ligne droite. Soit en effet le point d'intersection M'_3, autre que M_1 et M_2, de la cubique Σ avec la droite M_1M_2. Si R'_3 est le paramètre de M'_3, on a

$$R_1R_2R_3 = C = R_1R_2R'_3$$

et par suite $R_3 = R'_3$; donc M'_3 coïncide avec M

Théorème. — *Les paramètres de deux points conjugués* M *et* M' *sont opposés.*

En effet, les tangentes en M et M' se rencontrent sur la cubique en un point μ de paramètre ρ. Si R et R' sont les paramètres des points M et M', on a

$$\rho R^2 = C = \rho R'^2,$$

d'où $$R^2 = R'^2,$$

et par suite $$R = -R'.$$

Théorème. — *Si* M *et* M' *sont les points de contact des tangentes à* Σ *menées par un point* μ *de* Σ, *la droite* MM' *rencontre la cubique en un troisième point* μ' *qui est conjugué de* μ.

Soient en effet R et $-$R les paramètres des points M et M', ρ et ρ' les paramètres des points μ et μ'. On a

$$\rho R^2 = C = -\rho' R^2,$$

d'où $$\rho = -\rho'.$$

Théorème. — *La cubique* Σ *admet trois points d'inflexion, et ces trois points sont en ligne droite.*

Soit r le paramètre d'un point m d'inflexion. La tangente en ce point à Σ rencontrant Σ en trois points confondus, on a

$$r^3 = C.$$

Cette équation en r admet trois racines r_1, r_2, r_3, ce qui montre qu'il existe trois points d'inflexion. D'autre part, on a

$$r_1 r_2 r_3 = C;$$

les trois points d'inflexion sont donc sur une même droite, dite *droite des inflexions*.

Théorème. — *Le conjugué harmonique d'un point d'inflexion par rapport aux deux points d'intersection variables de la cubique et d'une droite variable passant par le point d'inflexion décrit une droite.*

Soient en effet m le point d'inflexion, M et M_1 les points d'intersection variables de Σ avec une droite passant par m. Le couple des droites OM et OM_1 varie dans une involution. Quand la sécante variable vient se confondre avec la tangente d'inflexion, les deux points M et M_1 viennent se confondre avec m. L'une des droites doubles de l'involution précédente est la droite Om; l'autre droite double est le lieu du conjugué harmonique de m par rapport aux points M et M_1. Ce lieu est dit *polaire harmonique du point d'inflexion m par rapport à Σ*.

On voit que du point d'inflexion m on ne peut mener qu'une tangente à Σ autre que la tangente d'inflexion, et le point de contact m' de cette tangente est le point d'intersection, autre que O, de Σ avec la polaire harmonique de m. Ce point m' est conjugué de m sur Σ.

Soient deux sécantes passant par le point d'inflexion m et rencontrant Σ aux points M, M_1 et N, N_1. Les droites MN et M_1N_1 se rencontrent sur la polaire harmonique de m. Quand, M et M_1 restant fixes, N et N_1 tendent respectivement vers M et M_1, les droites MN et M_1N_1 tendent vers les tangentes à Σ en M et M_1 ; on voit ainsi que la polaire harmonique de m est aussi le lieu du point de rencontre des tangentes à Σ en M et M_1.

Théorème. — *Les couples de droites qui joignent un point μ de Σ aux couples de points* M *et* M′ *conjugués sur Σ appartiennent à une même involution.*

En effet, soient M_1 et M'_1 les troisièmes points d'intersection de Σ avec les droites μM et $\mu M'$. Si R, R′, R_1, R'_1 sont les paramètres des points M, M′, M_1, M'_1, on a

$$RR_1 = R'R'_1.$$

Or, R et R′ sont opposés ; il en est donc de même de R_1 et de R'_1 ; autrement dit, les points M_1 et M'_1 sont conjugués.

D'après cela, à la droite variable Δ passant par le point fixe μ, rencontrant la cubique Σ en deux points variables M et M_1, il correspond une droite Δ', et une seule, passant par μ et rencontrant Σ aux points M' et M'_1 respectivement conjugués de M et de M_1. D'autre part, quand Δ prend la position de Δ', Δ' prend la position de Δ. Il en résulte que les droites Δ et Δ' se correspondent involutivement.

L'un des couples de l'involution ainsi définie est le couple des tangentes menées par μ à Σ. L'une des droites doubles de cette involution est évidemment la droite μO. Voici comment se détermine la seconde droite double. Soit μ' le conjugué de μ sur Σ ; les points de contact N et N' des tangentes menées par μ' à Σ sont conjugués et sont, comme nous l'avons vu, en ligne droite avec μ ; la droite $\mu NN'$ est donc la seconde droite double.

Théorème. — *Soit une droite variable passant par un point fixe μ de Σ et rencontrant Σ en deux points variables* M *et* M_1. *Si μ' est le conjugué de μ, les droites $\mu'M$ et $\mu'M_1$ se correspondent involutivement.*

En effet, soit M' le troisième point d'intersection de la droite $\mu'M_1$ avec la cubique. Soient ρ, R, R_1, R' les paramètres des points μ, M, M_1, M'. On a

$$-\rho R_1 R' = C;$$

mais, on a $$\rho R R_1 = C;$$

par suite, on a $$R' = -R,$$

et le point M' est conjugué de M. D'après le théorème précédent, les droites $\mu'M$ et $\mu'M_1$ qui passent par deux points conjugués variables de Σ se correspondent en involution. Les droites doubles de l'involution sont la droite $\mu'O$ et la droite qui passe par les points de contact des tangentes menées par μ à Σ.

3. **Théorème.** — *Pour que six points* M_1, M_2, M_3, ..., M_6 *de* Σ, *de paramètres* R_1, R_2, R_3, ..., R_6, *soient situés sur une même conique, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_1 R_2 R_3 \ldots R_6 = C^2.$$

1° Supposons que les points M soient situés sur une même conique Γ. Soient μ, μ', μ'' les troisièmes points d'intersection de Σ avec les droites M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6. Si ρ, ρ', ρ'' sont les paramètres de ces points, on a

$$\rho R_1 R_2 = C, \qquad \rho' R_3 R_4 = C, \qquad \rho'' R_5 R_6 = C$$

et par suite

$$\rho\rho'\rho'' R_1R_2R_3R_4R_5R_6 = C^3.$$

Or, les points μ, μ', μ'' sont en ligne droite (VII, § 3) ; on a donc

$$\rho\rho'\rho'' = C,$$

et par suite $$R_1R_2R_3R_4R_5R_6 = C^2.$$

2° Supposons que les paramètres R_1, ..., R_6 de six points M_1, ..., M_6 de Σ vérifient l'égalité énoncée. Par les cinq points M_1, M_2, ..., M_5, parmi lesquels il n'y en a pas quatre en ligne droite, il passe une conique Γ, et une seule, qui rencontre Σ en un sixième point M', de paramètre R'. On a à la fois

$$R_1R_2 \dots R_5R_6 = C^2, \qquad R_1R_2 \dots R_5R' = C^2,$$

d'où $R_6 = R'$; le point M' coïncide avec le point M_6 ; les six points donnés sont situés sur la conique Γ.

Conséquences. — 1° On a le théorème suivant :

Pour que trois points M_1, M_2, M_3 de Σ soient les points de contact avec Σ d'une conique proprement dite tritangente à Σ, il faut et il suffit qu'ils soient les conjugués de trois points en ligne droite sur Σ.

S'il existe en effet une conique Γ proprement dite tangente à Σ aux points M_1, M_2, M_3, de paramètres R_1, R_2, R_3, on a

$$R_1^2R_2^2R_3^2 = C^2$$

et par suite $$R_1R_2R_3 = \pm C.$$

Or les points M_1, M_2, M_3 ne sont pas en ligne droite ; on a donc l'égalité

$$R_1R_2R_3 = -C,$$

qui s'écrit aussi

$$(-R_1)(-R_2)(-R_3) = C.$$

Cette égalité exprime que les conjugués M'_1, M'_2, M'_3 des points M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite.

Réciproquement, si les conjugués des points M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite, on a

$$R_1R_2R_3 = -C,$$

d'où il résulte d'abord que les points M_1, M_2, M_3 ne sont pas en ligne droite. On en déduit l'égalité

$$R_1^2 R_2^2 R_3^2 = C^2,$$

qui exprime qu'il existe une conique Γ rencontrant Σ en deux points confondus avec M_1, en deux points confondus avec M_2 et en deux points confondus avec M_3. Comme les points M_1, M_2, M_3 ne sont pas en ligne droite, cette conique Γ est proprement dite ; elle est tangente à Σ aux points M_1, M_2, M_3.

2° *Par trois points μ_1, μ_2, μ_3 de Σ il passe trois coniques Γ osculatrices à Σ en un point autre que μ_1, μ_2, μ_3. En outre, les trois points de contact de ces coniques Γ avec Σ et les trois points μ_1, μ_2, μ_3 sont situés sur une même conique.*

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les paramètres des points μ_1, μ_2, μ_3 et R le paramètre d'un point M de Σ. Pour que M soit le point de contact avec Σ d'une conique Γ osculatrice à Σ et passant par μ_1, μ_2, μ_3, il faut et il suffit que son paramètre soit racine de l'équation du troisième degré en R,

$$R^3 = \frac{C^2}{\rho_1\rho_2\rho_3}.$$

On voit ainsi qu'il existe trois coniques Γ. Si R', R'', R''' sont les racines de cette équation, on a

$$R'R''R''' = \frac{C^2}{\rho_1\rho_2\rho_3},$$

c'est-à-dire $$R'R''R'''\rho_1\rho_2\rho_3 = C^2,$$

ce qui montre que les trois points de contact M', M'', M''' des trois coniques Γ avec Σ et les points μ_1, μ_2, μ_3 sont situés sur une même conique.

Remarquons que lorsque les points μ_1, μ_2, μ_3 sont en ligne droite, les points M', M'', M''' sont les points d'inflexion de la cubique.

4. Soit une conique Γ rencontrant Σ aux six points M_1, M_2, ..., M_6, de paramètres R_1, R_2, ..., R_6. La droite M_5M_6 rencontre la cubique en un troisième point μ de paramètre ρ. On a

$$R_1R_2R_3R_4R_5R_6 = C^2, \qquad \rho R_5R_6 = C,$$

d'où, par division membre à membre,

$$\frac{R_1R_2R_3R_4}{\rho} = C.$$

Supposons que, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 restant fixes, la conique Γ varie et tende vers la conique Γ_0 qui passe par les cinq points M_1, M_2, M_3, M_4, O. La droite M_5M_6 tend vers la tangente en O à cette conique, le point μ tend vers le point m, de paramètre r, d'intersection, autre que O, de la tangente en O à la conique Γ_0 avec Σ, et l'on a, entre les paramètres des points M_1, M_2, M_3, M_4 et m, la relation

$$\frac{R_1R_2R_3R_4}{r} = C.$$

Cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que les points M_1, M_2, M_3, M_4 et m de Σ soient, les quatre premiers, les points d'intersection, autres que O, d'une conique passant par O avec Σ, le dernier, le point d'intersection, autre que O, de la tangente en O à cette conique avec Σ.

La relation précédente peut s'écrire

$$\frac{(-R_1)(-R_2)(-R_3)(-R_4)}{r} = C.$$

On voit ainsi que la conique Γ_0 qui passe par O et quatre autres points M_1, M_2, M_3, M_4 de Σ et la conique Γ'_0 qui passe par O et les quatre points M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 conjugués de M_1, M_2, M_3, M_4 ont même tangente en O.

Application. — On démontre que par un point P quelconque du plan on peut mener quatre tangentes à Σ et que la conique qui passe par les quatre points de contact M_1, M_2, M_3, M_4 de ces tangentes et par le point O a pour tangente en O la droite conjuguée harmonique de OP par rapport aux droites Ox et Oy. Si donc R_1, R_2, R_3, R_4 sont les paramètres des points M_1, M_2, M_3, M_4 et si ρ est le paramètre du point μ d'intersection de Σ avec la droite OP, on a

$$\frac{R_1R_2R_3R_4}{\rho} = -C.$$

En particulier, si P décrit une droite fixe passant par O, le produit $R_1R_2R_3R_4$ est constant.

5. Soit P un point fixe de Σ. Si A et A′, B et B′ sont deux couples de points conjugués sur Σ, les deux couples de droites PA, PA′ et PB, PB′ définissent une involution qui admet PO comme droite double. Considérons les coniques S du faisceau linéaire tangentiel qui contient les deux coniques décomposées l'une en les deux points A et A′, l'autre en les deux points B et B′. Les couples de tangentes menées de P à ces coniques forment une involution qui contient les deux couples de droites PA, PA′ et PB, PB′; cette involution admet PO comme droite double, ce qui veut dire qu'il existe une conique S tangente en P à OP. On voit ainsi que la cubique Σ peut être définie comme *le lieu des points de contact des tangentes menées de son point double aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel*, qui contient deux coniques décomposées en des couples de points conjugués sur la cubique. C'est la réciproque d'un théorème antérieurement établi (VII, § 11).

Soient P et P′ les points de contact des tangentes menées de O à une conique S ; ce sont deux points de la cubique ; montrons qu'ils sont conjugués. En effet, les couples de tangentes menées de O aux coniques S forment une involution ; or, deux de ces couples sont les couples de droites OA, OA′ et OB, OB′ ; l'involution coïncide donc avec l'involution formée par les couples de droites qui joignent O aux couples de points conjugués sur la cubique.

Il en résulte que l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués sur Σ est l'enveloppe des polaires de O par rapport aux coniques S. Cette enveloppe est une conique Γ, tangente aux tangentes en O à Σ, qui sont les droites doubles de l'involution formée par les couples de tangentes menées de O aux coniques S.

D'un point P de la cubique, on peut mener deux tangentes à Γ; l'une est la droite qui joint le point P à son conjugué P′, l'autre est la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de P′ à la cubique.

Théorème. — *Le point de contact avec* Γ *de la droite qui joint deux points conjugués* M *et* M′ *sur* Σ *est conjugué harmonique par rapport aux points* M *et* M′ *du troisième point d'intersection de* MM′ *avec* Σ.

Soient en effet deux autres points conjugués M_1 et M'_1 sur Σ, M_2 le troisième point d'intersection avec Σ de la droite MM_1. Si R, R_1, R_2 sont les paramètres des points M, M_1, M_2, on a

$$RR_1R_2 = C,$$

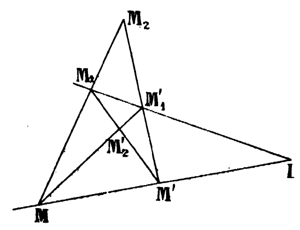
relation qui s'écrit aussi

$$(-R)(-R_1)R_2 = C,$$

d'où il résulte que M_2 est le troisième point d'intersection de Σ avec la droite $M'M'_1$. La même relation peut encore s'écrire

$$R(-R_1)(-R_2) = C, \qquad (-R)R_1(-R_2) = C,$$

d'où il résulte que les droites MM'_1 et $M'M_1$ passent par le point M'_2 conjugué de M_2 sur Σ.



Soit I le point d'intersection des droites MM' et $M_1M'_1$. La droite M_2I est conjuguée harmonique de la droite $M_2M'_2$ par rapport aux deux droites MM_1M_2 et $M'M'_1M'_2$.

Cela posé, M et M' étant fixes, faisons tendre M_1 vers M et M'_1 vers M' ; le point M_2 tend vers le point d'intersection des tangentes en M et M' à Σ, le point M'_2 tend vers le troisième point d'intersection avec Σ de la droite MM' ; il en résulte immédiatement que la position limite de I, point de contact de MM' avec Γ, est conjuguée harmonique par rapport aux points M et M' du troisième point d'intersection de la droite MM' avec Σ.

Théorème. — *La conique Γ est tangente à Σ aux trois points I'_1, I'_2, I'_3 conjugués des points d'inflexion I_1, I_2, I_3.*

En effet, la droite OI' est la polaire harmonique du point d'inflexion I ; il s'ensuit que la droite II' est tangente en I' à Σ. Le troisième point d'intersection de Σ avec la droite qui joint I et I' est ainsi confondu avec I' ; or, le conjugué harmonique de I' par rapport aux deux points I et I' est le point I' lui-même ; la conique Γ est donc tangente en I' à la droite II', c'est-à-dire tangente en ce point à Σ.

Théorème. — *La polaire harmonique d'un point d'inflexion est la polaire de ce point par rapport à Γ.*

En effet, une des tangentes menées de I à Γ est la droite II', le point de contact étant I'. L'autre tangente rencontre Σ en deux points conjugués A et A', et le point de contact est conjugué harmonique de I par rapport à A et A' ; ce point est donc situé sur la

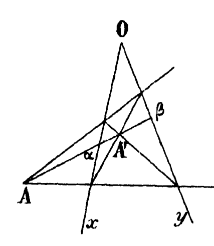
polaire harmonique de I. Comme I′ appartient aussi à la polaire harmonique de I, cette droite est confondue avec la polaire de I par rapport à Γ.

Théorème. — *La polaire du point O par rapport à Γ est la droite des inflexions.*

En effet, les polaires des points d'inflexion par rapport à Γ passent toutes trois par le point O.

Il suit de là que les tangentes en O à Σ touchent Γ en deux points situés sur la droite des inflexions.

6. Soient deux couples de points conjugués A, A′ et B, B′ sur la cubique. Il est évident que les deux coniques décomposées en ces couples de points et la conique décomposée en deux points confondus en O ne font pas partie d'un même faisceau linéaire tangentiel. Elles définissent donc un réseau linéaire tangentiel de coniques S. Nous allons démontrer que la cubique Σ est la hessienne de ce réseau.



En effet, la hessienne est une cubique qui, comme nous l'avons vu (VII, § 11), admet le point O comme point double, les tangentes en ce point étant les droites doubles de l'involution qui contient les deux couples de droites OA, OA′ et OB, OB′. Ces tangentes coïncident donc avec les tangentes en O à la cubique Σ. D'autre part, la hessienne du réseau considéré passe, comme Σ, par les points A, A′, B, B′. Cela posé, les droites OA et OA′ étant conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes Ox et Oy en O aux deux cubiques, il est possible de construire un quadrangle ayant pour côtés opposés Ox et Oy, de façon que les points de rencontre, autres que O, des côtés opposés du quadrangle soient A et A′. Désignons par α et β les points d'intersection de AA′ avec Ox et Oy. La transformation quadratique définie au moyen du faisceau linéaire ponctuel des coniques qui sont circonscrites à ce quadrangle transforme les deux cubiques en deux coniques qui passent par O, α et β et par les deux points transformés de B et de B′. Ces deux coniques, qui ont cinq points communs, tels que parmi ces cinq points il n'y en ait pas quatre en ligne droite, sont confondues, et il en est de même des deux cubiques dont elles sont les transformées.

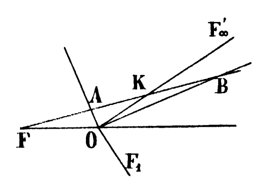
Les coniques décomposées du réseau linéaire tangentiel préc-

dont sont formées par les couples de points conjugués sur la cubique Σ, et les coniques proprement dites de ce réseau sont toutes les coniques qui passent par deux points conjugués quelconques P et P′ sur Σ et sont tangentes en ces points aux droites OP et OP′.

La conique Γ enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués sur Σ est la cayleyenne du réseau.

7. Nous appellerons *strophoïde* toute cubique circulaire ayant un point double O à tangentes rectangulaires.

Les points cycliques I et J sont conjugués sur une strophoïde; par suite, les tangentes en ces points à la courbe se rencontrent en un point F, dit *foyer singulier*, situé sur la courbe. Pour qu'une cubique circulaire à point double soit une strophoïde, il faut et il suffit qu'elle passe par son foyer singulier.



Soient A et B les points d'intersection variables d'une strophoïde avec une droite variable passant par le foyer singulier F. Le couple des droites OA et OB varie dans une involution dont les droites doubles sont les droites isotropes qui passent par O; autrement dit, les droites OA et OB sont constamment rectangulaires. Le point conjugué F′ de F est le point à l'infini de la strophoïde dans la direction asymptotique réelle. Le couple des droites F′A et F′B varie dans une involution dont les droites doubles sont la droite F′O et la droite à l'infini. Il en résulte que la droite F′O, c'est-à-dire la parallèle à la direction asymptotique réelle menée par O, rencontre la droite variable FAB au milieu K de AB. Le triangle AOB étant rectangle en O, on a

$$KA = KB = KO.$$

On retrouve ainsi la définition élémentaire de la strophoïde.

Remarquons qu'il existe un cercle tangent en O à OF′ et tangent en A à FA; la strophoïde est ainsi le lieu des points de contact des tangentes menées de F aux cercles tangents en O à OF′. Remarquons aussi qu'il existe un cercle de centre K et de rayon KO passant par les points A et B; ce cercle est tangent en O à la perpendiculaire OF_1 en O à OF′; la strophoïde est ainsi le lieu des points d'intersection des cercles tangents en O à OF_1 avec leurs diamètres qui passent par F (VII, § 5).

L'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués de la

strophoïde est tangente à la droite à l'infini ; c'est donc une parabole Γ. Le point O est un point de la directrice de la parabole et la polaire du point O par rapport à la parabole est la droite des inflexions. Le foyer φ de Γ est donc le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite des inflexions.

Les couples de droites qui joignent un point fixe M de la strophoïde aux couples de points conjugués sur cette courbe forment une involution. L'un de ces couples est le couple des droites isotropes qui passent par M ; les droites doubles de l'involution sont donc rectangulaires ; l'un d'eux est la droite MO ; l'autre est la droite qui passe par M et par les points de contact des tangentes à la strophoïde menées par le point M' conjugué de M sur la courbe. Cette dernière droite est tangente à la parabole Γ, et la strophoïde apparaît ainsi comme *la podaire de la parabole* Γ *par rapport au point* O, *qui appartient à la directrice de* Γ.

Lorsque la cubique Σ est une strophoïde, le réseau linéaire tangentiel dont elle est la hessienne contient la conique décomposée en les deux points cycliques. Il en résulte que si une conique fait partie du réseau, toute conique homofocale en fait aussi partie. Les foyers réels et les foyers imaginaires d'une conique S du réseau forment des couples de points conjugués sur la strophoïde ; les axes des coniques S sont tangents à la parabole Γ, et les centres de ces coniques sont situés sur la directrice de Γ.

Considérons les coniques homofocales à une conique S ; elles forment un faisceau linéaire tangentiel de coniques S. *La strophoïde est le lieu des points de contact des tangentes menées de* O *à ces coniques.*

D'autre part, tout cercle qui a pour centre O est une conique S. On voit ainsi que la *strophoïde est le lieu des points de contact des tangentes menées de* O *aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel qui contient un cercle de centre* O.

8. Par application du principe de dualité aux théorèmes qui viennent d'être établis relativement aux cubiques ayant un point double à tangentes distinctes, on obtient des théorèmes relatifs aux courbes de la troisième classe ayant une tangente double à points de contact distincts. Il suffit de les énoncer.

Soient I et J les points de contact de la tangente double T avec la courbe Σ.

1° Les couples de points d'intersection avec T des tangentes variables à Σ menées par un point variable d'une tangente fixe forment une involution qui contient le couple des points I et J. Réci-

proquement, le lieu des points d'intersection de deux tangentes variables à Σ menées par deux points variables de T se correspondant dans une involution qui fait se correspondre les points I et J est une droite tangente à Σ. Les tangentes à Σ aux points d'intersection de cette droite avec Σ, autres que son point de contact avec Σ, rencontrent T aux points doubles de l'involution précédente.

Nous dirons que deux tangentes Δ et Δ′ à Σ sont *conjuguées* lorsque leurs points de rencontre avec T sont conjugués harmoniques par rapport aux points I et J. Pour que deux tangentes soient conjuguées, il faut et il suffit que la droite qui joint leurs points de contact avec Σ soit tangente à Σ.

2° M étant le point où une tangente variable Δ à Σ rencontre T, et, d'autre part, ω étant un point fixe de T, autre que I et J, nous appellerons *paramètre* R *de* Δ le rapport anharmonique (IJMω). A chaque tangente Δ à Σ il correspond une et une seule valeur de R, et réciproquement. Exception doit être faite pour la tangente double qui a deux paramètres, 0 et ∞.

Les paramètres de deux tangentes conjuguées sont opposés.

Pour que trois tangentes à Σ soient concourantes, il faut et il suffit que le produit de leurs paramètres soit égal à une constante C, non nulle et non infinie, dont la valeur dépend du point fixe ω choisi sur T.

3° Voici des conséquences de ce théorème.

Si on mène les tangentes à Σ aux points A et A′ où elle est rencontrée par une de ses tangentes Δ, la troisième tangente à Σ menée par le point de rencontre des tangentes en A et A′ est la tangente Δ′ conjuguée de Δ.

La courbe admet trois points de rebroussement, et les tangentes de rebroussement concourent en un point, que nous appellerons *centre des rebroussements*.

Si d'un point d'une tangente de rebroussement on mène les tangentes variables à Σ, la droite conjuguée harmonique de la tangente de rebroussement par rapport à ces deux tangentes passe par un point fixe de la tangente double ; nous appellerons ce point *pôle harmonique de la tangente de rebroussement.*

Une tangente de rebroussement rencontre la courbe en un seul point autre que le point de rebroussement. La tangente en ce point est conjuguée de la tangente de rebroussement, et elle passe par le pôle harmonique de la tangente de rebroussement.

Deux tangentes conjuguées variables rencontrent une tangente fixe en deux points qui se correspondent involutivement. Un couple

de l'involution est formé par les points où la tangente fixe rencontre Σ. Un des points doubles est le point d'intersection de la tangente fixe avec T, l'autre point double est le point d'intersection des tangentes à Σ aux points où Σ est rencontrée par la tangente conjuguée de la tangente fixe.

Si on mène d'un point variable sur une tangente fixe les deux autres tangentes à Σ, ces deux droites rencontrent la tangente conjuguée de la tangente fixe en deux points qui se correspondent involutivement. Les points doubles de l'involution sont, d'une part, le point où la tangente conjuguée de la tangente fixe rencontre la tangente double, d'autre part, le point d'intersection des tangentes à la courbe aux points où celle-ci est rencontrée par la tangente fixe.

4° Pour que six tangentes à Σ soient tangentes à une même conique, il faut et il suffit que le produit de leurs paramètres soit égal à C^2.

5° Voici des conséquences de ce théorème.

Pour que trois points de Σ soient les points de contact avec Σ d'une conique proprement dite tritangente à Σ, il faut et il suffit que les tangentes à Σ en ces trois points soient les conjuguées de trois tangentes concourantes à Σ.

Étant données trois tangentes δ_1, δ_2, δ_3 à Σ, il existe trois coniques tangentes à ces trois droites et osculatrices à Σ en un point autre qu'un des points de contact de Σ avec δ_1, δ_2, δ_3. Les tangentes à Σ aux trois points M de contact avec ces coniques et les droites δ_1, δ_2, δ_3 sont tangentes à une même conique.

Soit une conique Γ tangente à la tangente double T à Σ en un point m. Outre T, elle admet avec Σ quatre tangentes communes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Si R_1, R_2, R_3, R_4 sont les paramètres de ces quatre droites et si r est le rapport anharmonique des quatre points I, J, m, ω, on a

$$\frac{R_1R_2R_3R_4}{r} = C.$$

Une droite quelconque L rencontre Σ en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Si Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont les tangentes à Σ en ces quatre points, la conique qui est tangente à ces quatre droites et à T a pour point de contact avec T le conjugué harmonique par rapport aux points I et J du point μ d'intersection de L et de T. R_1, R_2, R_3, R_4 étant les paramètres de Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et ρ étant le rapport anharmonique des quatre points I, J, μ, ω, on a

$$\frac{R_1R_2R_3R_4}{\rho} = -C.$$

En particulier, si la droite L varie en passant par un point fixe μ de T, le produit $R_1R_2R_3R_4$ est constant.

9. Une courbe de la troisième classe qui a une tangente double à points de contact distincts peut être définie comme l'enveloppe des tangentes, en leurs points d'intersection avec une droite fixe, aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel qui contient deux coniques décomposées en deux couples de tangentes conjuguées ; la droite fixe est la tangente double. Les points de contact de la tangente double sont les points où cette droite touche deux coniques du faisceau linéaire ponctuel.

Le lieu des points d'intersection de deux tangentes conjuguées est une conique Γ qui passe par les points de contact de la courbe avec sa tangente double.

Une tangente quelconque à Σ rencontre Γ en deux points ; l'un est le point où cette tangente est rencontrée par sa conjuguée ; l'autre est le point d'intersection des tangentes à Σ aux points où Σ est rencontrée par cette tangente conjuguée.

La tangente en un point à la conique Γ est, par rapport aux deux tangentes conjuguées à Σ qui passent par le point, conjuguée harmonique de la troisième tangente à Σ menée de ce point.

La conique Γ touche la courbe Σ aux points, autres que les points de rebroussement, où Σ est rencontrée par les tangentes de rebroussement. Le pôle d'une tangente de rebroussement par rapport à Γ est le pôle harmonique de cette tangente. Le pôle de la tangente double T par rapport à Γ est le centre des rebroussements.

Considérons toutes les coniques S qui touchent deux tangentes conjuguées à Σ aux points où ces deux droites sont rencontrées par la tangente double T. Ces coniques appartiennent à un réseau linéaire ponctuel dont les coniques décomposées sont formées par les couples de tangentes conjuguées à Σ. La courbe Σ est la cayleyenne de ce réseau, et la conique Γ en est la hessienne.

10. Supposons que la courbe Σ soit une courbe de la troisième classe bitangente à la droite à l'infini, les points de contact étant les points cycliques I et J.

Deux tangentes conjuguées sont rectangulaires. Les tangentes à Σ aux points où Σ est rencontrée par une de ses tangentes sont rectangulaires.

Si ω est un point à l'infini, le paramètre d'une tangente est égal à e^{2iV}, V étant l'angle de la direction λ qui a pour point à l'infini ω avec cette tangente. On a par suite le théorème suivant, dû à Laguerre :

Pour que trois tangentes à Σ soient concourantes, il faut et il suffit que la somme des angles que fait une direction fixe λ avec ces tangentes ait une certaine valeur donnée A, *définie à* $k\pi$ *près, qui dépend du choix de la direction fixe* λ.

On appelle *orientation* d'un système de droites variables par rapport à une direction fixe la somme des angles que fait la direction fixe avec ces droites. L'énoncé précédent se transforme ainsi :

Pour que trois tangentes à Σ soient concourantes, il faut et il suffit que l'orientation du système de ces tangentes ait une certaine valeur donnée A.

Si θ est l'angle que fait λ avec une tangente de rebroussement, on a

$$3\theta = A + k\pi,$$

k étant un entier quelconque. On voit ainsi que les tangentes de rebroussement font entre elles des angles de 60° et de 120°.

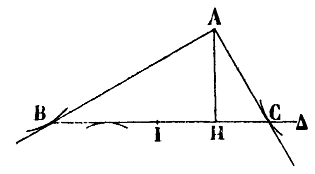
Le pôle harmonique d'une tangente de rebroussement étant à l'infini dans la direction des perpendiculaires à cette droite, les deux tangentes variables menées à Σ par un point variable d'une tangente de rebroussement sont symétriques par rapport à cette tangente, ce qui montre que la courbe Σ admet ses tangentes de rebroussement comme axes de symétrie. Il en résulte immédiatement que les trois points de rebroussement sont les sommets d'un triangle équilatéral et que le centre O des rebroussements est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Deux tangentes rectangulaires rencontrent une tangente fixe en deux points variables symétriques par rapport à un point fixe de cette tangente fixe. Parmi les couples de points déterminés ainsi sur la tangente fixe se trouvent le couple des points d'intersection de la tangente fixe avec Σ et le couple formé par le point de contact de la tangente fixe et le point où cette tangente est rencontrée par sa conjuguée.

La conique Γ est un cercle qui est tangent à Σ aux points, autres que les points de rebroussement, où Σ est rencontrée par ses tangentes de rebroussement ; il a pour centre le point O. C'est le lieu des points d'intersection de deux tangentes rectangulaires à Σ.

Considérons le triangle rectangle formé par une tangente Δ à Σ et les tangentes rectangulaires à Σ aux points B et C où Δ rencontre Σ. Le cercle Γ passe par le sommet A de l'angle droit, par le pied H de la hauteur abaissée de A sur l'hypoténuse BC et par le milieu I de BC ; il est donc le cercle des neuf points du triangle

ABC; son rayon est égal à $\frac{1}{2}$BC. On voit ainsi que la portion BC d'une tangente Δ à Σ comprise entre les deux points d'intersection de Δ avec Σ a une longueur constante, égale au diamètre du cercle Γ.



Toute tangente Δ à Σ rencontre Γ en deux points dont l'un μ est le point d'intersection avec sa conjuguée Δ' et l'autre ν le milieu fixe du segment limité aux points d'intersection de Δ avec deux tangentes rectangulaires quelconques à Σ. Le point M de contact de Δ avec Σ est le symétrique de μ par rapport à ν.

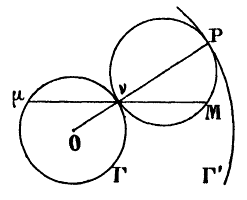
Quand le point μ se déplace sur Γ, le point ν varie sur ce cercle, et sa position dépend de celle du point μ. Désignons par α l'arc algébrique décrit par μ à partir d'une position initiale et par β l'arc algébrique décrit par le point ν à partir de la position initiale correspondante. Il est facile de montrer que l'on a

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\left(\frac{\overrightarrow{M\mu}}{\overrightarrow{M\nu}}\right) = -2.$$

On en tire, en intégrant,

$$\alpha = -2\beta.$$

On en déduit immédiatement que le point M peut être considéré comme un point marqué sur le cercle constamment égal à Γ, qui passe par M et est tangent en ν à Γ, roulant sans glisser sur le cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon triple du rayon de Γ. Ce cercle Γ' est le cercle qui passe par les trois points de rebroussement de Σ. On voit ainsi que Σ est une *hypocycloïde à trois rebroussements.*



Les coniques S sont les coniques qui ont pour asymptotes deux tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde. *Une hypocycloïde à trois rebroussements Σ est d'une infinité de manières l'enveloppe des asymptotes d'hyperboles équilatères qui forment un faisceau linéaire ponctuel; le lieu des centres de ces hyperboles est le cercle Γ tritangent à l'hypocycloïde.*

On a relativement à l'hypocycloïde Σ les autres résultats suivants :

1° Pour que six tangentes à l'hypocycloïde soient tangentes à une même conique, il faut et il suffit que l'orientation du système de ces tangentes soit égale à $2A$.

2° Pour que trois points de l'hypocycloïde Σ soient les points de contact avec Σ d'une conique tritangente à Σ, il faut et il suffit que les tangentes à Σ en ces trois points soient respectivement perpendiculaires à trois tangentes concourantes à Σ.

3° Soit une parabole. Outre la droite à l'infini, elle admet avec l'hypocycloïde Σ quatre tangentes communes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Si V_1, V_2, V_3, V_4 sont les angles que fait la direction fixe λ avec ces quatre droites et si v est l'angle que fait cette même direction avec la direction asymptotique de la parabole, on a

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - v = A.$$

4° Une droite quelconque L rencontre l'hypocycloïde Σ en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sont les tangentes à Σ en ces quatre points, la parabole tangente à ces quatre droites a sa direction asymptotique perpendiculaire à L. Si V_1, V_2, V_3, V_4 sont les angles que fait λ avec $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ et si u est l'angle que fait λ avec la direction asymptotique de la parabole, on a

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - u = A + \frac{\pi}{2}.$$

Si u est constant, il en est de même de $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$. Par suite,

L'orientation du système des tangentes à l'hypocycloïde aux quatre points d'intersection de cette courbe avec une droite L *demeure constante lorsque la droite* L *se déplace parallèlement à une droite fixe.*

5° Supposons que la droite L soit normale à la courbe Σ. Alors l'une des quatre tangentes précédentes est perpendiculaire à L ; par exemple, on a

$$V_1 = u + \frac{\pi}{2};$$

il s'ensuit que l'on a

$$V_2 + V_3 + V_4 = A;$$

on a ainsi le théorème suivant :

Les tangentes à l'hypocycloïde aux points d'intersection, autres que M, *de la courbe avec la normale en un de ses points* M *sont concourantes.*

11. Soit une cubique Σ ayant un point de rebroussement O; les deux tangentes en O sont confondues en une seule droite Ox. On a le théorème suivant :

Si M *et* M_1 *sont les points d'intersection variables de la cubique avec une droite passant par un point fixe* P *de la cubique, les couples de droites telles que* OM *et* OM_1 *appartiennent à une même involution, qui admet comme droite double la tangente de rebroussement.*

On a la démonstration sommaire suivante. A la droite OM il correspond une droite OM_1 et une seule, et inversement; en outre, quand OM prend la position de OM_1, OM_1 prend la position de OM. Il s'ensuit que les droites OM et OM_1 se correspondent involutivement. Quand M tend vers O, il en est de même de M_1; les droites OM et OM_1 tendent simultanément vers Ox, qui est une droite double de l'involution formée par les couples de droites OM et OM_1.

Mais on peut ramener aussi le théorème au théorème de Frégier, en transformant quadratiquement la cubique en une conique. La démonstration est la même que celle du théorème fondamental sur les cubiques ayant un point double à tangentes distinctes (§ 1).

Réciproquement, si deux droites variables passant par O *et rencontrant* Σ *en deux points variables* M *et* M_1 *se correspondent en involution, et si en outre la tangente de rebroussement est une droite double de l'involution, la droite* MM_1 *passe par un point fixe de la cubique.*

La démonstration est la même que celle que nous avons donnée du théorème réciproque du théorème fondamental relatif aux cubiques ayant un point double à tangentes distinctes.

Les droites doubles de l'involution formée par les couples de droites OM et OM_1 sont la droite Ox et la droite qui joint le point O au point de contact d'une tangente, autre que la tangente en P, menée de P à la cubique.

Faisons correspondre à chaque point M de Σ un paramètre λ représentant linéairement la droite OM autour du point O. Le point O a un paramètre α, qui est la valeur de λ quand la droite variable qui passe par O prend la position Ox. Soient λ et λ_1 les paramètres des points M et M_1 d'intersection de la cubique avec une droite variable passant par un point fixe P de Σ. D'après ce qui

précède, la droite conjuguée harmonique de Ox par rapport aux droites OM et OM_1 est fixe, et par suite on a

$$\frac{1}{\lambda-\alpha}+\frac{1}{\lambda_1-\alpha}=\text{const.}$$

12. Théorème. — *Le pôle harmonique du point de rebroussement O par rapport à un système de trois points quelconques de Σ en ligne droite est un point fixe de Σ. Ce point fixe est l'unique point d'inflexion I de Σ. Réciproquement, si le pôle harmonique de O par rapport à un système de trois points de Σ coïncide avec I, les trois points sont en ligne droite.*

Soient en effet deux droites Δ et Δ' rencontrant respectivement Σ aux points M_1, M_2, M_3, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et aux points M'_1, M'_2, M'_3, de paramètres $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$. Considérons le point m, de paramètre μ, d'intersection, autre que M_1 et M'_1, de la droite $M_1M'_1$ avec Σ. D'après le théorème précédent, on a

$$\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\lambda'_1-\alpha}$$

et
$$\frac{1}{\lambda'_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda'_3-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\lambda_1-\alpha},$$

d'où $\dfrac{1}{\lambda_1-\alpha}+\dfrac{1}{\lambda_2-\alpha}+\dfrac{1}{\lambda_3-\alpha}=\dfrac{1}{\lambda'_1-\alpha}+\dfrac{1}{\lambda'_2-\alpha}+\dfrac{1}{\lambda'_3-\alpha}.$

Nous désignerons par C la valeur constante de la somme des nombres tels que $\dfrac{1}{\lambda-\alpha}$ relatifs aux points de rencontre de Σ avec une droite quelconque.

Réciproquement, si M_1, M_2, M_3, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur Σ, sont tels que l'on ait

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}=C,$$

ces trois points sont en ligne droite. Soit en effet le point d'intersection M'_3, autre que M_1 et M_2, de la cubique Σ avec la droite M_1M_2. Si λ'_3 est le paramètre de M'_3, on a

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda'_3-\alpha}=C=\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha},$$

et par suite $\lambda_3=\lambda'_3$; donc M'_3 coïncide avec M_3.

Cela posé, montrons que la cubique Σ admet un point d'inflexion et un seul. Soit en effet ρ le paramètre d'un point d'inflexion I. La tangente en ce point à Σ rencontrant Σ en trois points confondus, on a

$$\frac{3}{\rho-\alpha}=C.$$

Cette équation en ρ admet une racine et une seule, ce qui montre qu'il existe un point d'inflexion et un seul.

Grâce à l'introduction du point I d'inflexion de Σ, la condition nécessaire et suffisante pour que trois points M_1, M_2, M_3 de Σ soient en ligne droite s'écrit

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}=\frac{3}{\rho-\alpha},$$

ce qui exprime que I est le pôle harmonique de O par rapport au système des points M_1, M_2, M_3, ou encore que la droite OI est polaire harmonique de Ox par rapport aux droites OM_1, OM_2, OM_3.

En particulier, supposons que la tangente de rebroussement soit la droite à l'infini du plan. Le théorème précédent peut alors s'énoncer ainsi :

Pour que trois points de la cubique soient en ligne droite, il faut et il suffit que leur centre des moyennes distances soit situé sur la parallèle à la direction asymptotique de la cubique menée par le point d'inflexion.

13. Théorème. — *Le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points d'intersection variables de la cubique et d'une droite variable passant par le point d'inflexion décrit la tangente de rebroussement.*

Soient en effet I le point d'inflexion, M et M_1 les points d'intersection variables de Σ avec une droite passant par I. Le couple des droites OM et OM_1 varie dans une involution. Quand la sécante variable vient se confondre avec la tangente d'inflexion, les deux points M et M_1 viennent se confondre avec I. L'une des droites doubles de l'involution est donc la droite OI; la tangente de rebroussement, qui est l'autre droite double de l'involution, est le lieu du conjugué harmonique de I par rapport aux points M et M_1.

Considérons deux sécantes passant par I, l'une rencontrant Σ en M et M_1, l'autre rencontrant Σ en M' et M'_1. Les droites MM' et $M_1M'_1$ se rencontrent en un point situé sur la tangente de rebrous-

sement. Si, M et M_1 étant fixes, M' et M'_1 tendent respectivement vers M et M', les droites MM' et $M_1M'_1$ tendent vers les tangentes en M et M_1 à Σ. Ainsi, la tangente de rebroussement est le lieu du point de rencontre des tangentes à Σ en M et M_1.

14. Théorème. — *Pour que six points $M_1, M_2, \ldots, M_6$ de Σ soient situés sur une même conique, il faut et il suffit que le point d'inflexion de Σ soit le pôle harmonique du point double par rapport au système de ces six points.*

1° Supposons que les points M soient sur une même conique Γ. Soient m, m', m'' les troisièmes points d'intersection de Σ avec les droites M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ sont les paramètres des points $M_1, M_2, \ldots, M_6$, si ρ, ρ', ρ'' sont les paramètres des points m, m', m'', enfin, si μ est le paramètre du point d'inflexion, on a

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\rho-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha},$$
$$\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}+\frac{1}{\rho'-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha},$$
$$\frac{1}{\lambda_5-\alpha}+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}+\frac{1}{\rho''-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}+\frac{1}{\rho-\alpha}+\frac{1}{\rho'-\alpha}+\frac{1}{\rho''-\alpha}=\frac{9}{\mu-\alpha}.$$

Or, les points m, m', m'' sont en ligne droite; on a donc

$$\frac{1}{\rho-\alpha}+\frac{1}{\rho'-\alpha}+\frac{1}{\rho''-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha},$$

et par suite $$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}=\frac{6}{\mu-\alpha}.$$

2° Supposons que les paramètres λ de six points M de Σ vérifient l'égalité précédente. Par les cinq points $M_1, M_2, \ldots, M_5$, parmi lesquels il n'y en a pas quatre en ligne droite, il passe une conique Γ, et une seule, qui rencontre Σ en un sixième point M', de paramètre λ'. On a à la fois

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_5-\alpha}+\frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{6}{\mu-\alpha},$$

et $$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_5-\alpha}+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}=\frac{6}{\mu-\alpha},$$

d'où $\lambda' = \lambda_6$; le point M' coïncide avec le point M_6 ; les six points donnés sont situés sur la conique Γ.

Conséquence. — *Par trois points m_1, m_2, m_3 de Σ, il passe une conique Σ et une seule osculatrice à Σ en un point* M *autre que m_1, m_2, m_3.*

Le paramètre de M est en effet racine de l'équation du premier degré en λ

$$\frac{3}{\lambda - \alpha} = \frac{6}{\mu - \alpha} - \frac{1}{\rho_1 - \alpha} - \frac{1}{\rho_2 - \alpha} - \frac{1}{\rho_3 - \alpha},$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant les paramètres des points m_1, m_2, m_3.

15. Soit une conique Γ rencontrant Σ aux six points $M_1, M_2, \ldots, M_6$, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$. La droite M_5M_6 rencontre la cubique en un troisième point m de paramètre ρ. On a

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda_6 - \alpha} = \frac{6}{\mu - \alpha},$$

$$\frac{1}{\lambda_5 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_6 - \alpha} + \frac{1}{\rho - \alpha} = \frac{3}{\mu - \alpha},$$

d'où, par soustraction membre à membre,

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda_4 - \alpha} - \frac{1}{\rho - \alpha} = \frac{3}{\mu - \alpha}.$$

Supposons que, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 restant fixes, la conique Γ varie et tende vers la conique Γ_0 qui passe par les cinq points M_1, M_2, M_3, M_4, O. La droite M_5M_6 tend vers la tangente en O à cette conique, et le point m tend vers le point d'intersection t, autre que O, de Σ avec cette tangente. Si θ est le paramètre de t, on a

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda_4 - \alpha} - \frac{1}{\theta - \alpha} = \frac{3}{\mu - \alpha}.$$

Cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que les points M_1, M_2, M_3, M_4 et t de Σ soient, les quatre premiers, les points d'intersection, autres que O, d'une conique passant par O avec Σ, le dernier, le point de rencontre, autre que O, de Σ avec la tangente en O à cette conique.

16. La cubique Σ est de la troisième classe. Les résultats précédents admettent des résultats corrélatifs, qui s'appliquent à une courbe de la troisième classe ayant un point d'inflexion. Une telle

courbe est du troisième degré et admet un point de rebroussement; c'est une cubique Σ.

D'un point variable K de la tangente d'inflexion, on ne peut mener qu'une tangente variable à la cubique Σ. Si M est le point de contact de cette tangente, il y a correspondance homographique entre la droite OM et la droite OK. Tout paramètre représentant linéairement le point K sur la tangente d'inflexion est lié homographiquement à un paramètre représentant linéairement la droite OM autour de O. On a aussi les théorèmes suivants :

1° *Pour que les tangentes en trois points* M_1, M_2, M_3 *de* Σ *soient concourantes, il faut et il suffit que le point de rebroussement soit pôle harmonique du point d'inflexion par rapport au système de ces trois points, ou encore, il faut et il suffit que la droite* Ox *soit polaire harmonique de* OI *par rapport au système des droites* OM_1, OM_2, OM_3, *ou enfin, il faut et il suffit que le point d'intersection des tangentes d'inflexion et de rebroussement soit pôle harmonique de* I *par rapport au système des points* K_1, K_2, K_3 *où la tangente d'inflexion rencontre les tangentes en* M_1, M_2, M_3.

2° *Pour que les tangentes en six points* M_1, M_2, ..., M_6 *de* Σ *soient tangentes à une même conique, il faut et il suffit que le point de rebroussement soit pôle harmonique du point d'inflexion par rapport au système de ces six points.*

3° *Si d'un point de la tangente de rebroussement on mène les deux tangentes variables à* Σ, *la droite conjuguée harmonique de la tangente de rebroussement par rapport à ces deux droites passe constamment par le point d'inflexion. La droite qui joint les points de contact de ces tangentes variables à* Σ *passe aussi par le point d'inflexion.*

17. Nous appellerons *cissoïde* toute cubique à point de rebroussement passant par les points cycliques I et J. On a immédiatement, relativement à la cissoïde, les théorèmes suivants :

1° *Si on mène une droite parallèle à l'asymptote réelle, les droites qui joignent le point double aux points d'intersection à distance finie de cette droite avec la cissoïde sont symétriques par rapport à la tangente de rebroussement.*

2° *La droite qui joint le point de rebroussement au point de la cissoïde où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle est perpendiculaire à la tangente de rebroussement.*

3° *Par un point de la cissoïde on peut mener à la cissoïde un cercle osculateur, et un seul, touchant la cissoïde en un point autre que le point donné.*

CHAPITRE IX

CONES DU SECOND DEGRÉ ET CONES DE LA SECONDE CLASSE

---

1. Définitions. — Un cône du second degré de sommet S est le lieu d'un point M tel que la droite SM rencontre une conique donnée Γ, proprement dite ou décomposée en deux droites, située dans un plan Π qui ne passe pas par S. Si la conique Γ se décompose en deux droites Δ_1 et Δ_2, on dit que le cône se décompose en les deux plans qui passent par S et respectivement par les droites Δ_1 et Δ_2.

Un cône de la seconde classe de sommet S est l'enveloppe d'un plan qui passe par S et qui rencontre un plan donné Π ne passant pas par S suivant une tangente à une conique donnée Γ, proprement dite ou décomposée en deux points. Si la conique Γ est décomposée en deux points A_1 et A_2, on dit que le cône se décompose en les deux droites SA_1 et SA_2.

Un cône du second degré indécomposable est aussi un cône de la seconde classe indécomposable, et réciproquement.

On dit que deux droites D et D′ passant par le sommet S d'un cône du second degré ou de la seconde classe sont *conjuguées* par rapport à ce cône si ces deux droites rencontrent un plan Π qui ne passe pas par S en deux points conjugués par rapport à la conique Γ d'intersection du cône avec le plan Π. La définition est indépendante du plan Π. On dit que trois droites D, D′, D″ passant par le sommet S de ce cône forment un *trièdre conjugué* par rapport au cône si ces trois droites rencontrent le plan Π en trois points qui sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport à la conique Γ; la définition est indépendante du plan Π.

On dit que deux plans P et P′ passant par le sommet S d'un cône du second degré ou de la seconde classe sont *conjugués* par rapport à ce cône si ces deux plans rencontrent un plan Π qui ne passe pas par S suivant deux droites conjuguées par rapport à la conique Γ d'intersection du cône avec le plan Π. La définition est indépendante du plan Π.

Si trois plans P, P′, P″ passant par S sont conjugués deux à deux par rapport au cône, ce sont les plans des faces d'un trièdre conjugué par rapport au cône, et réciproquement.

Soient dans un plan Π les coniques Γ d'un faisceau linéaire ponctuel. On dit que les cônes qui ont pour bases ces coniques et pour sommet commun un point S non situé dans le plan Π forment un *faisceau linéaire ponctuel de cônes du second degré*. Les coniques Γ′ d'intersection de ces cônes avec un autre plan Π′ qui ne passe pas par S forment un faisceau linéaire ponctuel de coniques. Il existe dans le faisceau de cônes des cônes décomposés en deux plans, qui ont pour bases dans le plan Π les coniques Γ décomposées en deux droites.

Soient dans un plan Π les coniques Γ d'un faisceau linéaire tangentiel. On dit que les cônes qui ont pour bases ces coniques et pour sommet commun un point S non situé dans le plan Π forment un *faisceau linéaire tangentiel de cônes de la seconde classe*. Les coniques Γ′ d'intersection de ces cônes avec un autre plan Π′ qui ne passe pas par S forment un faisceau linéaire tangentiel de coniques. Il existe dans le faisceau de cônes des cônes décomposés en deux droites, qui ont pour bases dans le plan Π les coniques Γ′ décomposées en deux points.

2. On a les théorèmes suivants :

1° *Les six arêtes de deux trièdres conjugués par rapport à un cône du second degré de sommet* S *sont situées sur un même cône du second degré de sommet* S, *qui est proprement dit ou décomposé en deux plans.*

2° *Les plans des six faces de deux trièdres conjugués par rapport à un cône du second degré de sommet* S *sont tangents à un même cône de la seconde classe de sommet* S, *qui est proprement dit ou décomposé en deux droites.*

Pour démontrer ces théorèmes, on coupera le cône et les deux trièdres conjugués par rapport à ce cône par un plan Π qui ne passe pas par le sommet du cône, et on appliquera les théorèmes relatifs aux triangles conjugués par rapport à une conique, qui ont été établis au chapitre II (§ 1).

On en tire les conséquences suivantes :

1° *Étant donnés deux cônes* Σ *et* Σ′ *du second degré de même sommet* S, *s'il existe un trièdre à la fois inscrit à* Σ′ *et conjugué par rapport à* Σ, *il en existe une infinité, de façon qu'on puisse prendre pour arête d'un tel trièdre une droite arbitraire du cône* Σ′ *passant par* S.

Le cône Σ' est alors dit *harmoniquement circonscrit au cône* Σ.

2° *Étant donnés deux cônes* Σ *et* Σ' *de la seconde classe, s'il existe un trièdre à la fois circonscrit à* Σ' *et conjugué par rapport à* Σ, *il en existe une infinité, de façon qu'on puisse prendre pour plan d'une face d'un tel trièdre un plan tangent arbitraire au cône* Σ'.

Le cône Σ' est alors dit *harmoniquement inscrit au cône* Σ.

3. Applications. — Dire que deux droites D et D′ passant par le point S sont rectangulaires revient à dire que les deux droites sont conjuguées par rapport au cône isotrope de sommet S ; dire que deux plans P et P′ passant par le point S sont rectangulaires revient à dire que ces deux plans sont conjugués par rapport au cône isotrope de sommet S. Il s'ensuit que pour qu'un trièdre de sommet S soit trirectangle, il faut et il suffit qu'il soit conjugué par rapport au cône isotrope de sommet S.

On en déduit les résultats suivants :

1° *Les six arêtes de deux trièdres trirectangles de même sommet sont situées sur un même cône du second degré.*

2° *Les plans des six faces de deux trièdres trirectangles de même sommet sont tangents à un même cône de la seconde classe.*

3° *Si un cône de sommet* S *est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits, une droite arbitraire du cône, passant par* S, *pouvant être prise comme arête d'un tel trièdre.*

Le cône est harmoniquement circonscrit au cône isotrope de sommet S ; il est dit *équilatère.*

4° *Si un cône de sommet* S *est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits, un plan tangent arbitraire au cône pouvant être pris comme plan d'une face d'un tel trièdre.*

Le cône est harmoniquement inscrit au cône isotrope de sommet S ; c'est le cône supplémentaire d'un cône équilatère.

4. On a les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés deux trièdres inscrits à un cône du second degré, il existe un cône du second degré de même sommet admettant ces deux trièdres comme trièdres conjugués.*

2° *Étant donnés deux trièdres circonscrits à un cône de la seconde*

classe, il existe un cône du second degré admettant ces deux trièdres comme trièdres conjugués.

Pour démontrer ces théorèmes, on coupera le cône et les deux trièdres par un plan II ne passant pas par le sommet du cône, et on appliquera les théorèmes établis au chapitre II (§ 3).

On en tire les conséquences suivantes :

1° *Les trièdres inscrits à un cône du second degré de sommet* S *et conjugués par rapport à un cône du second degré de sommet* S *sont circonscrits à un cône du second degré de sommet* S.

2° *Les trièdres circonscrits à un cône du second degré de sommet* S *et conjugués par rapport à un cône du second degré de sommet* S *sont inscrits à un cône du second degré de sommet* S.

3° *Si deux trièdres sont inscrits à un même cône du second degré, ils sont aussi circonscrits à un même cône du second degré.*

4° *Si deux trièdres sont circonscrits à un même cône du second degré, ils sont aussi inscrits à un même cône du second degré.*

5° *Étant donnés deux cônes du second degré* Σ *et* Σ' *de même sommet* S, *s'il existe un trièdre à la fois inscrit à* Σ *et circonscrit à* Σ', *il existe une infinité de tels trièdres.*

6° *Les trièdres inscrits au cône* Σ *et circonscrits au cône* Σ' *sont conjugués par rapport à un même cône du second degré.*

5. On a les théorèmes suivants qui se ramènent à des théorèmes établis au chapitre II (§ 6) :

1° *Étant donnés deux cônes du second degré* Σ *et* Σ' *de même sommet, si le cône* Σ' *est harmoniquement circonscrit au cône* Σ, *le cône* Σ *est harmoniquement inscrit au cône* Σ'.

2° *Étant donnés deux cônes du second degré* Σ *et* Σ' *de même sommet, si le cône* Σ' *est harmoniquement inscrit au cône* Σ, *le cône* Σ *est harmoniquement circonscrit au cône* Σ'.

6. On a les théorèmes suivants qui correspondent à des théorèmes relatifs aux coniques (II, § 8) :

1° *Parmi les cônes du second degré d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe un, et en général un seul, qui est harmoniquement circonscrit à un cône* Σ *du second degré donné, de même sommet que ces cônes. S'il existe deux cônes du faisceau harmoniquement circonscrits à* Σ, *tout cône du faisceau est harmoniquement circonscrit à* Σ.

En particulier, supposons que le cône Σ soit isotrope ; on a alors l'énoncé suivant :

Parmi les cônes du second degré d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe un, et en général un seul, qui est équilatère. S'il existe dans le faisceau deux cônes équilatères, tout cône du faisceau est équilatère.

2° *Parmi les cônes de la seconde classe d'un faisceau linéaire tangentiel, il en existe un, et en général un seul, qui est harmoniquement inscrit à un cône Σ du second degré donné, de même sommet que ces cônes. Si deux cônes de ce faisceau sont harmoniquement inscrits à Σ, tout cône du faisceau est harmoniquement inscrit à Σ.*

7. Le théorème de Desargues relatif aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel conduit immédiatement au théorème suivant :

Les cônes du second degré d'un faisceau linéaire ponctuel sont rencontrés par un plan fixe Π *passant par leur sommet commun* S *suivant des couples de droites qui appartiennent à une même involution. Parmi ces cônes, il en existe deux qui sont tangents au plan* Π, *les génératrices de contact étant les droites doubles de l'involution précédente.*

On déduit aussi du théorème de Desargues relatif aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel le théorème suivant :

Les couples de plans tangents menés aux cônes de la seconde classe d'un faisceau linéaire tangentiel par une droite fixe Δ *passant par leur sommet commun* S *appartiennent à une même involution. Parmi ces cônes, il en existe deux qui passent par* Δ, *les plans tangents à ces deux cônes le long de* Δ *étant les plans doubles de l'involution précédente.*

8. Applications. — 1° Étant donné un cône Σ du second degré de sommet S, il existe une infinité de cônes du second degré qui ont mêmes directions de plans cycliques que le cône Σ. Les coniques à l'infini de ces cônes passent par les points d'intersection de la conique à l'infini de Σ et du cercle à l'infini ; elles forment un faisceau linéaire ponctuel qui contient le cercle à l'infini. Les cônes considérés forment un faisceau linéaire ponctuel qui contient le cône isotrope de sommet S. On dit que ces cônes sont *homocycliques*.

L'involution formée par les couples de droites suivant lesquels les cônes homocycliques à un cône de second degré Σ sont rencontrés par un plan Π passant par leur sommet commun S contient le

couple des droites isotropes du plan Π qui passent par S. Il s'ensuit que *les couples de droites considérés ont les mêmes bissectrices ; il existe deux cônes du faisceau qui sont tangents au plan* Π *suivant deux droites rectangulaires*.

2° Soit un cône Σ du second degré non de révolution. Sa conique à l'infini rencontre le cercle à l'infini en quatre points distincts A, B, C, D. Soient P, Q, R les points de rencontre respectivement des droites AB et CD, AC et DB, AD et BC ; ces points sont les points à l'infini des axes du cône Σ, les droites QR, RP, PQ sont les droites à l'infini des plans principaux du cône Σ. Considérons le faisceau linéaire tangentiel de coniques qui contient le cercle à l'infini et la conique à l'infini de Σ. Ce faisceau contient trois coniques décomposées en deux points : une conique formée de deux points α et α' situés sur la droite QR et conjugués harmoniques par rapport aux points Q et R, une conique formée de deux points β et β' situés sur la droite RP et conjugués harmoniques par rapport aux points R et P, enfin, une conique formée de deux points γ et γ' situés sur la droite PQ et conjugués harmoniques par rapport aux points P et Q. Les six droites $S\alpha$ et $S\alpha'$, $S\beta$ et $S\beta'$, $S\gamma$ et $S\gamma'$ sont dites les *droites focales du cône* Σ. Dans chaque plan principal de Σ, il existe deux droites focales, qui sont symétriques par rapport aux axes de Σ situés dans le plan. Ces droites focales sont les droites passant par S par chacune desquelles il passe deux plans isotropes tangents à Σ. Si l'équation du cône Σ est à coefficients réels, les plans isotropes tangents à Σ sont deux à deux imaginaires conjugués ; il s'ensuit que deux des droites focales sont réelles, les quatre autres étant imaginaires conjuguées deux à deux.

Il existe une infinité de cônes du second degré qui ont mêmes droites focales que le cône Σ ; ce sont les cônes proprement dits du faisceau linéaire tangentiel de cônes de la seconde classe qui contient le cône Σ et le cône isotrope de même sommet. Ces cônes de la seconde classe sont dits *homofocaux*. Les trois couples de droites focales de ces cônes homofocaux sont des cônes de la seconde classe décomposés en deux droites qui font partie du faisceau linéaire tangentiel précédent.

Les couples de plans tangents menés aux cônes de la seconde classe homofocaux à un cône Σ par une droite Δ passant par le sommet S de Σ forment une involution qui contient le couple des plans isotropes qui passent par Δ ; il s'ensuit que *ces couples de plans ont les mêmes plans bissecteurs. Par la droite* Δ, *il passe deux cônes homofocaux à* Σ, *et ces deux cônes se coupent suivant* Δ *orthogonalement. Les plans tangents menés à un cône du second degré* Σ *par*

une droite Δ qui passe par le sommet de Σ ont les mêmes plans bissecteurs que les deux plans qui passent par Δ et par les droites focales réelles de Σ.

Soit un cylindre Σ du second degré à centres à distance finie et non de révolution. Menons par son sommet S à l'infini les tangentes D_1 et D_2 au cercle à l'infini. Il existe quatre plans tangents isotropes au cylindre, qui passent par les droites D_1 et D_2; ces quatre plans se coupent suivant quatre droites, autres que D_1 et D_2, qui sont dites les *droites focales du cylindre*. Ces quatre droites sont les lieux des foyers des sections droites du cylindre. Il existe une infinité de cylindres du second degré qui ont mêmes droites focales que Σ ; ces cylindres sont coupés par un plan perpendiculaire à la direction commune de leurs génératrices suivant des coniques homofocales ; ils sont dits *homofocaux* ; ils forment un faisceau linéaire tangentiel, qui contient trois cylindres de la seconde classe décomposés en deux droites ; un de ces trois cylindres est formé des droites D_1 et D_2, les deux autres sont formés par les deux couples de droites focales qui sont situés respectivement dans les deux plans principaux communs aux cylindres du faisceau.

Soit un cylindre parabolique Σ. Il existe une droite Δ par laquelle on peut mener au cylindre parabolique deux plans tangents isotropes ; cette droite est le lieu des foyers des sections droites du cylindre ; elle est dite *droite focale du cylindre.* On dit que deux cylindres paraboliques sont *homofocaux* s'ils ont même droite focale et même plan principal. Les cylindres paraboliques homofocaux à un cylindre parabolique donné forment un faisceau linéaire tangentiel.

3° Les coniques qui, dans le plan à l'infini, rencontrent le cercle à l'infini en quatre points fixes distincts forment un faisceau linéaire ponctuel contenant le cercle à l'infini. Ces coniques se transforment par polaires réciproques par rapport au cercle à l'infini en des coniques qui ont quatre tangentes communes distinctes et forment un faisceau linéaire tangentiel contenant le cercle à l'infini. Comme, d'autre part, les coniques à l'infini de deux cônes supplémentaires du second degré proprement dits sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport au cercle à l'infini, on voit que *les cônes supplémentaires de deux cônes du second degré homocycliques sont homofocaux, et réciproquement.* En outre, *les droites focales d'un cône du second degré proprement dit sont perpendiculaires aux directions des plans cycliques du cône supplémentaire.*

4° Les cônes de révolution qui ont un sommet S donné et un

axe Δ donné appartiennent à un faisceau linéaire ponctuel et à un faisceau linéaire tangentiel. Ils sont rencontrés par le plan Π mené par S perpendiculairement à Δ suivant deux droites D_1 et D_2 le long de chacune desquelles ils sont tangents au cône isotrope de sommet S. Ces cônes ont mêmes directions de plans cycliques. Les plans tangents menés par Δ à chacun de ces cônes sont isotropes ; cette droite Δ est dite *droite focale*.

9. Théorèmes. — 1° *Soient un cône du second degré Σ de sommet* S *et deux droites* D *et* D′ *passant par* S *et non situées dans un même plan tangent au cône. Le lieu de la droite* Δ *d'intersection de deux plans variables qui passent respectivement par* D *et* D′ *et qui sont conjugués par rapport au cône* Σ *est un cône* Σ′ *du second degré qui contient les droites* D *et* D′ *et les droites de contact des plans tangents au cône* Σ *menées par* D *et* D′.

En effet, le point d'intersection de la droite Δ avec un plan fixe Π qui ne passe pas par S décrit la conique harmonique ponctuelle relative à la conique d'intersection du cône Σ avec le plan Π et au couple des points d'intersection de D et de D′ avec ce plan.

En particulier, supposons que le cône Σ soit isotrope. Le théorème précédent s'énonce alors ainsi :

Étant données deux droites D *et* D′ *se rencontrant en un point* S *à distance finie, le lieu de la droite* Δ *d'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par* D *et* D′ *est un cône du second degré qui passe par les droites* D *et* D′ *et qui admet deux directions de plans cycliques respectivement perpendiculaires à ces droites.*

2° *Étant donnés deux cônes du second degré* Σ *et* Σ′ *de même sommet* S, *si la droite polaire par rapport à* Σ *d'un plan sécant commun aux deux cônes est située sur* Σ′, *la droite polaire par rapport à* Σ *du plan sécant commun qui forme avec le précédent un cône faisant partie du faisceau linéaire ponctuel qui contient* Σ *et* Σ′ *est aussi située sur* Σ′.

Pour établir ce théorème, on coupera la figure par un plan Π ne passant pas par S et on sera ramené à un théorème relatif aux coniques antérieurement démontré (V., § 4).

En particulier, supposons que le cône Σ soit isotrope. On a alors le théorème suivant :

Si un cône du second degré admet une génératrice rectiligne perpendiculaire à une direction de plans cycliques, il admet aussi une génératrice rectiligne perpendiculaire à la direction de plans cycliques associée.

Le cône est dit *cône de Hachette*. Ce qui précède montre que le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires qui passent par deux droites fixes ayant un point commun à distance finie est un cône de Hachette, et que, réciproquement, tout cône de Hachette peut être engendré par la droite d'intersection de deux plans variables rectangulaires passant par les génératrices rectilignes du cône qui sont perpendiculaires à deux directions de plans cycliques associées.

3° *Soient un cône* Σ *du second degré de sommet* S *et deux plans* P *et* P′ *passant par* S *et ne se rencontrant pas suivant une génératrice rectiligne de* Σ. *L'enveloppe d'un plan* Π *qui rencontre* Σ *suivant deux génératrices rectilignes conjuguées harmoniques par rapport aux droites d'intersection des plans* P *et* P′ *avec ce plan est un cône de la seconde classe qui est tangent aux plans* P *et* P′ *et aux plans tangents à* Σ *dont les génératrices de contact sont les droites d'intersection de* Σ *avec les plans* P *et* P′.

En effet, la droite d'intersection du plan Π avec un plan fixe H qui ne passe pas par S enveloppe la conique harmonique tangentielle relative à la conique d'intersection du cône Σ avec le plan H et au couple des droites d'intersection des plans P et P′ avec H.

En particulier, supposons que le cône Σ soit isotrope. On a alors le théorème suivant :

Étant donnés deux plans P *et* P′ *passant par un point* S *à distance finie, l'enveloppe d'un plan* Π *passant par* S *et rencontrant* P *et* P′ *suivant deux droites rectangulaires est un cône* Σ′ *de la seconde classe tangent aux plans* P *et* P′ *et admettant pour droites focales associées les perpendiculaires menées par* S *aux plans* P *et* P′.

Il est immédiat que le cône supplémentaire de Σ′ est un cône de Hachette passant par les perpendiculaires en S aux plans P et P′ et admettant les plans P et P′ comme plans cycliques associés.

4° *Étant donnés deux cônes de la seconde classe* Σ *et* Σ′ *de même sommet et les droites* D *et* D′ *qui forment un cône décomposé appartenant au faisceau linéaire tangentiel qui contient* Σ *et* Σ′, *si le plan polaire de* D *par rapport à* Σ *est tangent à* Σ′, *il en est de même du plan polaire de* D′ *par rapport à* Σ.

Pour établir ce théorème, on coupera les deux cônes et les deux droites par un plan Π ne passant pas par S et on sera ramené à un théorème antérieurement établi sur les coniques (V, § 4).

En particulier, supposons que le cône Σ soit isotrope. On a alors le théorème suivant :

Si une droite focale d'un cône du second degré est perpendiculaire à un plan tangent à ce cône, il en est de même de la droite focale qui lui est associée.

Le cône est dans ce cas le cône supplémentaire d'un cône de Hachette.

10. Théorèmes. — 1° *Soient deux cônes du second degré* Σ *et* Σ′ *de même sommet* S. *L'enveloppe des plans passant par* S *qui rencontrent ces deux cônes suivant deux couples de droites harmoniques l'un par rapport à l'autre est un cône de la seconde classe.*

Pour que l'enveloppe se décompose en deux droites, il faut et il suffit que la droite polaire d'un plan sécant commun aux deux cônes Σ *et* Σ′ *par rapport à un de ces deux cônes coïncide avec la droite polaire par rapport à l'autre de ces deux cônes du plan sécant commun associé.*

Ces théorèmes se ramènent à des théorèmes antérieurement établis sur les coniques (V, § 8) ; il suffit de couper les deux cônes par un plan Π ne passant pas par S.

En particulier, supposons que l'un des cônes soit isotrope. On a alors le théorème suivant :

Soit un cône du second degré Σ. *L'enveloppe des plans qui passent par le sommet* S *de* Σ *et qui rencontrent* Σ *suivant deux droites rectangulaires est un cône de la seconde classe. Pour que cette enveloppe se décompose en deux droites, il faut et il suffit que le diamètre conjugué par rapport à* Σ *d'une de ses directions de plans cycliques soit perpendiculaire à la direction de plans cycliques qui lui est associée.*

On a par suite le résultat suivant :

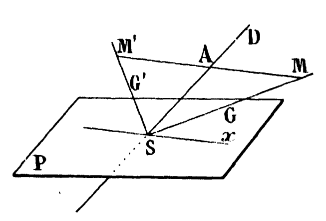
Soient un cône du second degré Σ *et ses deux directions* P *et* P′ *de plans cycliques. Si le diamètre conjugué* D *de la direction* P *par rapport à* Σ *est perpendiculaire à* P′, *réciproquement le diamètre conjugué* D′ *de la direction* P′ *par rapport à* Σ *est perpendiculaire à* P.

Un plan quelconque Π passant par D rencontre Σ suivant deux droites rectangulaires G_1 et G_2 qui sont conjuguées harmoniques par rapport à la droite D et à la droite d'intersection Δ du plan sécant Π et du plan P ; les deux droites G_1 et G_2 sont les bissectrices des angles formés par les droites D et Δ. La droite symétrique de la droite D par rapport à une génératrice rectiligne variable du cône Σ décrit le plan P.

Réciproquement, soient un plan P *et une droite* D *rencontrant* P *en un point* S *à distance finie.* Montrons que *le lieu d'une droite* G *passant*

par S *telle que la symétrique de* D *par rapport à* G *soit située dans le plan* P *est un cône du second degré.*

En effet, soient Sx une droite variable dans le plan P et G la bissectrice d'un angle formé par D et Sx. Par un point fixe A de D menons la parallèle à Sx qui rencontre G en M. Quand Sx varie, on a



$$AM = SA = \text{const.};$$

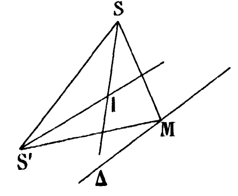
le lieu de M est un cercle Γ situé dans un plan P_1 parallèle au plan P. Le lieu de G est le cône Σ de sommet S qui a pour base le cercle Γ. La direction du plan P est une première direction réelle de plans cycliques du cône Σ.

Le cercle Γ passe par le point M′ symétrique de M par rapport à A. La droite G′ qui passe par S et M′ est une génératrice du cône Σ ; elle est perpendiculaire à G. Un plan quelconque passant par D rencontre le cône Σ suivant deux droites rectangulaires.

Le plan P′ tangent en S à la sphère qui passe par le cercle Γ et par le point S est perpendiculaire à D. Il s'ensuit que la seconde direction réelle de plans cycliques du cône Σ est la direction des plans perpendiculaires à D. Le diamètre conjugué de cette direction par rapport à Σ est la droite D′ perpendiculaire en S au plan P. Un plan quelconque passant par D′ rencontre Σ suivant deux génératrices rectangulaires.

Voici une application du théorème précédent :

Soient deux points fixes S *et* S′ *et une droite* Δ *non situés dans un même plan.* M *étant un point variable de* Δ, *le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle* MSS′ *est une biquadratique.*



En effet, soit I le centre d'un de ces cercles. Comme SS′ est une droite fixe et comme SM décrit le plan qui passe par S et Δ, la droite SI bissectrice de l'angle S′SM décrit un cône du second degré à base circulaire dans un plan perpendiculaire à SS′. De même, la droite S′I décrit un cône du second degré à base circulaire dans un plan perpendiculaire à SS′. Le lieu du point I est la biquadratique

d'intersection de ces deux cônes du second degré. Cette courbe passe par les points cycliques des plans perpendiculaires à SS'. Un plan quelconque passant par SS' la rencontre en quatre points qui sont les sommets d'un quadrangle orthocentrique.

2° *Soient deux cônes de la seconde classe* Σ *et* Σ' *de même sommet* S. *Le lieu d'une droite* Δ *passant par* S *et telle que les deux couples de plans tangents menés par* Δ *aux deux cônes soient harmoniques l'un par rapport à l'autre est un cône du second degré.*

Pour que ce cône se décompose en deux plans, il faut et il suffit que parmi les cônes décomposés du faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ *et* Σ' *il s'en trouve un formé de deux droites* D_1 *et* D_2 *telles que le plan polaire de* D_1 *par rapport à* Σ *coïncide avec le plan polaire de* D_2 *par rapport à* Σ'.

Ces théorèmes se ramènent à des théorèmes antérieurement établis sur les coniques (V, § 8); il suffit de couper les deux cônes donnés par un plan Π ne passant pas par S.

En particulier, supposons que l'un des cônes Σ et Σ' soit isotrope. On a alors le théorème suivant :

Étant donné un cône de la seconde classe Σ *de sommet* S, *le lieu d'une droite* Δ *passant par* S *telle que les deux plans tangents menés au cône par* Δ *soient rectangulaires est un cône du second degré de sommet* S.

Pour que ce lieu se décompose en deux plans, il faut et il suffit qu'il existe une droite focale du cône Σ *telle que son plan polaire par rapport à* Σ *soit perpendiculaire à la droite focale associée.*

On a par suite le résultat suivant :

Étant donnés un cône de la seconde classe Σ *et ses deux droites focales réelles* D *et* D', *si le plan polaire* P *de* D *par rapport à* Σ *est perpendiculaire à* D', *réciproquement, le plan polaire* P' *de* D' *par rapport à* Σ *est perpendiculaire à* D.

Soit un plan Π passant par D. Par la droite d'intersection des deux plans P et Π on peut mener à Σ deux plans tangents rectangulaires, qui sont conjugués harmoniques par rapport aux plans P et Π et qui sont ainsi les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans P et Π. Le plan symétrique de P par rapport à un plan tangent variable à Σ passe constamment par la droite D.

Réciproquement, soient un plan P *et une droite* D *rencontrant* P *en un point* S *à distance finie. L'enveloppe d'un plan passant par* S *et tel*

que le symétrique de P *par rapport à ce plan passe constamment par* D *est un cône de la seconde classe.*

Pour démontrer ce résultat, il suffit de constater que le cône supplémentaire de l'enveloppe cherchée est le lieu d'une droite G telle que la symétrique de la perpendiculaire en S au plan P par rapport à G soit située constamment dans le plan perpendiculaire en S à la droite D ; or, ce lieu est un cône du second degré.

CHAPITRE X

INVOLUTIONS BINAIRE, TERNAIRE ET QUATERNAIRE

---

1. Par définition, nous dirons que les couples de points, de droites ou de plans qui forment chacun avec un couple de points, de droites ou de plans, que nous appellerons *couple de base*, une division ou un faisceau harmonique sont en *involution binaire*. Nous dirons que les groupes de trois points, de trois droites ou de trois plans qui sont les sommets, les côtés des triangles conjugués par rapport à une conique, que nous appellerons *conique de base*, les arêtes ou les faces des trièdres conjugués par rapport à un cône du second degré, que nous appellerons *cône de base*, sont en *involution ternaire*. Enfin, nous dirons que les groupes de quatre points ou de quatre plans qui sont les sommets ou les faces des tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, que nous appellerons *quadrique de base*, sont en *involution quaternaire*.

Si l'on considère les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique de base qui ont en commun un sommet et la face opposée, les groupes d'arêtes ou de faces qui passent par le sommet commun sont en involution ternaire, le cône de base étant le cône circonscrit à la quadrique de base qui a pour sommet ce sommet commun; les groupes de sommets ou d'arêtes qui sont dans la face commune sont en involution ternaire, la conique de base étant la conique d'intersection de la quadrique de base avec cette face commune. De même, si l'on considère les groupes d'éléments en involution ternaire qui ont un élément commun, les couples d'éléments non communs sont en involution binaire. Par suite, d'une propriété quelconque commune aux groupes d'éléments en involution quaternaire résulte une propriété de groupes d'éléments en involution ternaire, et de celle-ci résulte aussi une propriété de l'involution binaire; on a ainsi trois propriétés correspondantes des involutions binaire, ternaire et quaternaire. Inversement, il est possible, en partant d'une propriété de l'involution binaire, d'établir la propriété correspondante de l'invo-

lution ternaire, et de passer de celle-ci à la propriété correspondante de l'involution quaternaire.

2. Passage de l'involution binaire à l'involution ternaire. Théorème fondamental. — *Étant donnés deux groupes d'éléments d'une involution ternaire, il est possible de déterminer deux autres groupes d'éléments de cette involution, formant avec les deux groupes donnés une suite de quatre groupes telle que deux groupes consécutifs de cette suite aient un élément commun.*

Soient, par exemple, deux triangles ABC et A′B′C′ conjugués par rapport à une conique de base Γ. Le point d'intersection I des droites BC et B′C′ étant le pôle par rapport à Γ de la droite AA′, il existe deux triangles conjugués par rapport à Γ ayant pour sommets l'un I et A, l'autre I et A′, leurs troisièmes sommets étant deux points J et J′ situés sur la droite AA′. Nous pouvons ainsi former la suite des quatre triangles conjugués ABC, AIJ, A′IJ′, A′B′C′, dans laquelle deux triangles conjugués consécutifs ont un sommet commun.

La même démonstration s'applique à toute involution ternaire.

D'après cela, faisons correspondre un élément d'une nature quelconque à tout groupe d'éléments d'une involution ternaire, de façon que dans cette correspondance il ne soit fait aucune distinction entre les trois éléments d'un groupe ; si cet élément reste invariable quand le groupe correspondant de l'involution varie en conservant un élément fixe, le même élément reste invariable quand le groupe correspondant de l'involution varie d'une façon quelconque.

Voici des applications.

1° **Théorèmes d'Apollonius relatifs aux quadriques.** — Soit une quadrique à centre unique O. Les trièdres qui ont pour arêtes trois diamètres conjugués de la quadrique forment une involution ternaire dont le cône de base est le cône asymptote de la quadrique. Quand un tel trièdre varie en conservant une même arête OA et la même face opposée, les deux arêtes variables OB et OC restent diamètres conjugués par rapport à la conique d'intersection de la quadrique avec le plan de la face fixe.

Supposons que A, B, C désignent des points de rencontre de la quadrique respectivement avec les arêtes d'un tel trièdre.

α. La somme des carrés des longueurs des diamètres variables OB et OC étant, d'après le premier théorème d'Apollonius relatif

aux coniques, constante, la somme des carrés des longueurs des diamètres conjugués OA, OB, OC de la quadrique est la même pour toutes les positions du trièdre (OA, OB, OC) qui ont une arête commune OA ; il s'ensuit que cette somme est la même pour toutes les positions de ce trièdre. Ainsi,

La somme des carrés des longueurs de trois diamètres conjugués quelconques d'une quadrique à centre est constante.

β. D'après le second théorème d'Apollonius relatif aux coniques, l'aire du parallélogramme qui a pour côtés les deux diamètres conjugués variables OB et OC est constante. Le volume du parallélépipède qui a pour arêtes OA, OB, OC étant égal au produit de l'aire de ce parallélogramme par la distance de A au plan BOC est donc constant pour toutes les positions du trièdre (OA, OB, OC) qui ont une arête commune OA ; ce volume est donc constant pour toutes les positions du trièdre. Ainsi,

Le volume du parallélépipède qui a pour arêtes trois demi-diamètres conjugués quelconques d'une quadrique à centre est constant.

γ. Quand, OA restant fixe, OB et OC varient dans le plan diamétral conjugué de la direction de OA, la somme des carrés des aires des parallélogrammes qui ont pour côtés l'un OA et OB, l'autre OA et OC est constante. En effet, cette somme est égale au produit par $\overline{OA}^2$ de la somme des carrés des distances des points B et C à OA, c'est-à-dire au produit par $\overline{OA}^2$ de la somme des carrés des projections orthogonales de OB et de OC sur un plan P perpendiculaire à OA. Or, cette somme est constante, car les projections des droites OB et OC sur le plan P sont deux diamètres conjugués de la projection sur le plan P de la conique d'intersection de la quadrique avec le plan fixe BOC. Par application du théorème fondamental, on voit que

La somme des carrés des aires des faces du parallélépipède qui a pour arêtes trois demi-diamètres conjugués quelconques d'une quadrique à centre est constante.

2° Soit une quadrique à centre unique O. Considérons un trièdre trirectangle variable de sommet O dont les arêtes rencontrent la quadrique respectivement aux points A, B, C. Si le trièdre varie de façon que OA reste fixe, OB et OC sont deux diamètres rectangulaires de la conique d'intersection de la quadrique avec le plan fixe BOC, et, comme nous l'avons établi, $\frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$ est constant

(VI, § 2); il s'ensuit que si le trièdre rectangle (OA, OB, OC) varie d'une façon quelconque, la somme

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$$

est constante. Or, comme l'on sait, cette somme est égale à $\frac{1}{\overline{OH}^2}$, H étant le pied de la perpendiculaire menée de O sur le plan ABC. Il s'ensuit que le plan ABC enveloppe une sphère de centre O. Le cône qui a pour sommet O et pour base la conique d'intersection de la quadrique avec le plan ABC est équilatère. Ainsi,

L'enveloppe d'un plan P *tel que le cône ayant pour sommet le centre* O *de la quadrique et pour base la section de la quadrique par le plan* P *soit équilatère est une sphère de centre* O.

3° **Théorème de Frégier.** — Soit un trièdre ayant pour sommet un point O d'une quadrique Q et variant en involution ternaire. Montrons que le plan qui passe par les points d'intersection variables A, B, C des arêtes de ce trièdre avec la quadrique Q passe par un point fixe.

En effet, quand le trièdre varie en conservant une même arête OA, le couple des arêtes OB et OC varie en involution binaire dans le plan conjugué de OA, les points B et C étant constamment situés sur la conique Γ d'intersection de la quadrique Q avec ce plan. En vertu du théorème de Frégier relatif aux coniques, la droite BC passe par un point fixe, et par suite le plan ABC passe par une droite fixe Δ. Mais, quand OB coïncide avec la tangente OT en O à la conique Γ, le plan ABC coïncide avec le plan conjugué de OT; le plan conjugué de OT passe donc par Δ. Comme OT est située dans le plan tangent en O à la quadrique, le plan conjugué de OT passe par la droite L, conjuguée du plan tangent en O à la quadrique. Ainsi, Δ rencontre L; autrement dit, le plan ABC rencontre L en un point I qui reste fixe quand le trièdre (OA, OB, OC) varie en conservant une même arête OA. En vertu du théorème fondamental, le point I reste le même pour toutes les positions de ce trièdre.

Le cône qui a pour sommet le point O et pour base la conique d'intersection de Q avec le plan ABC est harmoniquement circonscrit au cône de base de l'involution ternaire. Ainsi,

Tous les plans qui sont tels que les cônes ayant pour sommet un point O *d'une quadrique* Q *et pour bases les sections de la quadrique par ces plans soient harmoniquement circonscrits à un cône* Σ *donné du*

second degré de sommet O, passent par un même point, situé sur la droite polaire par rapport à Σ du plan tangent en O à la quadrique Q.

Si l'on suppose que le cône Σ soit isotrope, on a l'énoncé suivant :

Les plans tels que les cônes ayant pour sommet un point O de la quadrique Q et pour bases les sections de Q par ces plans soient équilatères passent par un même point, situé sur la normale en O à la quadrique Q.

Voici une application du théorème de Frégier relatif aux quadriques.

Soient une quadrique Q et un point fixe O situé sur la quadrique, et proposons-nous de déterminer le lieu d'un point M de la quadrique tel que les deux plans qui passent par O et les deux droites de Q qui passent par M soient conjugués par rapport à un cône Σ donné du second degré de sommet O.

Le cône qui a pour sommet O et pour base la section de Q par le plan tangent en M est formé des deux plans qui passent par O et les deux droites de la quadrique qui passent par M. Dire que M est un point du lieu, c'est dire que ce cône est harmoniquement circonscrit au cône Σ. Donc le plan tangent en M passe par un point fixe I situé sur la droite polaire par rapport à Σ du plan tangent en O à la quadrique Q. Il s'ensuit que *le lieu du point* M *est la conique de section de* Q *par le plan polaire de* I.

En particulier, si le cône Σ est isotrope, les deux plans qui passent par O et les droites de Q qui passent par M sont rectangulaires.

Par application du principe de dualité, du théorème de Frégier relatif aux quadriques on déduit le théorème corrélatif suivant :

Soient une quadrique Q *et une conique* Γ *située dans un plan* Π *tangent à la quadrique. Le lieu d'un point* M *tel que le cône de sommet* M *circonscrit à la quadrique soit harmoniquement inscrit au cône de sommet* M *qui a pour base la conique* Γ *est un plan qui passe par la polaire par rapport à* Γ *du point de contact du plan* Π *avec la quadrique* Q.

En particulier, supposons que la conique Γ soit le cercle à l'infini ; la quadrique Q est alors un paraboloïde, et l'on a le théorème suivant :

Le lieu des sommets des cônes circonscrits à un paraboloïde qui sont capables d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits est un plan, dit plan orthoptique du paraboloïde, *qui est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.*

4° Théorème de Faure relatif aux coniques. — A la démonstration précédente du théorème de Frégier relatif aux quadriques, il correspond une démonstration du théorème de Faure relatif aux triangles conjugués par rapport à une conique, lorsque cette conique est à centre unique.

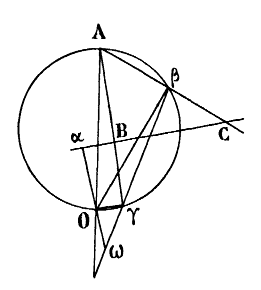
Soit un triangle ABC variant en restant conjugué par rapport à une conique Γ à centre unique O à distance finie. Lorsque ce triangle varie en conservant un sommet fixe A, le couple des autres sommets B et C varie en involution binaire sur la polaire de A par rapport à Γ; si ω est le point d'intersection de cette polaire avec la droite OA, on a

$$\overline{\omega B} \cdot \overline{\omega C} = \text{const.}$$

Les points A et ω et par suite les points de la droite Aω ont chacun une puissance constante par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. La puissance du point O par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC reste donc la même quand le triangle ABC varie en conservant un sommet fixe; en vertu du théorème fondamental, cette puissance est la même pour tous les triangles conjugués par rapport à Γ; c'est le théorème de Faure.

5° Autre théorème relatif aux coniques. — *La puissance du centre O d'une conique Γ par rapport au cercle qui passe par les pieds α, β, γ des perpendiculaires abaissées de O sur les côtés d'un triangle quelconque ABC conjugué par rapport à Γ est constante.*

Il suffit de démontrer ce théorème en supposant que le triangle ABC varie en conservant un sommet fixe A. Les points β et γ décrivent alors le cercle de diamètre OA; d'autre part, le couple des droites AB et AC variant en involution, d'après le théorème de Frégier, la droite βγ passe par un point fixe ω. Quand, le triangle ABC variant, la droite AC devient parallèle à la polaire de A par rapport à Γ, la droite AB coïncide avec la droite AO; le point γ vient alors en O, tandis que le point β vient sur la droite Oα; la droite βγ coïncide alors avec la droite Oα, et ainsi le point ω est situé sur la droite Oα. Or, la puissance du point ω par rapport au cercle variable αβγ, qui est égale à la puissance de ω par



rapport au cercle de diamètre AO, est constante. Les points α et ω ayant chacun même puissance par rapport aux divers cercles $\alpha\beta\gamma$, il en est de même de tout point de la droite $\alpha\omega$ et, en particulier, du point O, ce qui démontre le théorème.

Rappelons que dans le cas particulier où la conique Γ est une hyperbole équilatère, le cercle circonscrit au triangle conjugué ABC passe par O ; par suite, les points α, β, γ sont dans ce cas en ligne droite.

6° **Sphère de Monge ou orthoptique.** — Les trièdres trirectangles qui ont un sommet donné S sont en involution ternaire, le cône de base étant le cône isotrope de sommet S. D'après cela, étant donnés deux trièdres trirectangles de sommet S, il est possible de déterminer deux autres trièdres trirectangles de sommet S formant avec les deux premiers une suite dans laquelle deux trièdres trirectangles consécutifs ont une arête commune et par suite la face opposée commune. Amenons par translation chacun de ces trièdres à être circonscrit à une quadrique Q. On voit ainsi qu'étant donnés deux trièdres trirectangles circonscrits à Q, il est possible de déterminer deux autres trièdres trirectangles circonscrits à Q formant avec les deux premiers une suite dans laquelle deux trièdres consécutifs ont une face commune.

Cela posé, soit un trièdre trirectangle variable circonscrit à une quadrique Q ayant pour centre O. Quand ce trièdre varie en conservant une même face P, les deux autres faces, restant parallèles à la direction des droites perpendiculaires à P, sont tangentes au cylindre circonscrit à la quadrique dont les génératrices sont parallèles à cette direction. Les traces des faces variables du trièdre sur le plan P sont tangentes à la section du cylindre par le plan P ; elles sont de plus rectangulaires ; le sommet du trièdre reste donc à une distance constante d'un point quelconque de l'axe du cylindre et, en particulier, du centre O de la quadrique Q. On voit ainsi que la distance du sommet du trièdre au centre de Q est la même pour toutes les positions de ce trièdre qui ont une face commune ; donc, elle est la même pour toutes les positions du trièdre. Autrement dit,

Le lieu des sommets des cônes circonscrits à Q qui sont capables de trièdres trirectangles circonscrits est une sphère, dite sphère de Monge *ou* sphère orthoptique, *concentrique à la quadrique.*

3. Passage de l'involution ternaire à l'involution quaternaire. — Théorème fondamental. — *Étant donnés deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, il est possible d'en*

déterminer deux autres formant avec les deux premiers une suite dans laquelle deux tétraèdres consécutifs ont un sommet commun et par suite le plan de la face opposée commun.

Soient en effet deux tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ conjugués par rapport à une quadrique de base Q. Si ω est un point de la droite d'intersection des plans BCD et B′C′D′, considérons deux triangles $\omega\alpha\beta$ et $\omega\alpha'\beta'$ respectivement situés dans les plans BCD et B′C′D′ et respectivement conjugués par rapport aux coniques d'intersection de la quadrique de base avec ces plans. Nous avons ainsi quatre tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base : ABCD, $A\alpha\beta\omega$, $A'\alpha'\beta'\omega$, A′B′C′D′, qui se suivent de façon que deux tétraèdres consécutifs aient en commun un sommet et le plan de la face opposée.

D'après cela, faisons correspondre à tout tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique Q un élément d'une nature quelconque de façon que dans cette correspondance il ne soit fait aucune distinction entre les sommets ou entre les faces du tétraèdre ; si cet élément reste invariable quand le tétraèdre correspondant varie en conservant un sommet fixe, le même élément reste invariable quand le tétraèdre correspondant varie d'une façon quelconque.

Voici des applications.

1° **Théorème de Faure relatif aux quadriques.** — Le tétraèdre ABCD conjugué par rapport à une quadrique Q de centre unique O variant en conservant le sommet A fixe, le triangle BCD varie dans le plan polaire de A en restant conjugué par rapport à la conique Γ d'intersection de la quadrique de base et de ce plan. D'après le théorème de Faure relatif aux coniques, la puissance du centre ω de cette conique Γ par rapport au cercle variable circonscrit au triangle BCD, qui est aussi la puissance de ω par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, est constante. Il s'ensuit que la puissance de tout point de la droite $A\omega$ et, en particulier, du point O par rapport à cette sphère est elle-même constante. Par application du théorème fondamental, la puissance de O par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est la même pour toutes les positions du tétraèdre ABCD.

Montrons que cette puissance constante est égale au carré du rayon de la sphère de Monge de la quadrique Q. Pour cela, supposons que le sommet A du tétraèdre ABCD soit situé sur la sphère de Monge. Il existe alors une infinité de trièdres trirectangles circonscrits au cône circonscrit à Q qui a pour sommet le point A. Un tel trièdre est coupé par le plan polaire de A suivant un triangle PQR circonscrit à Γ, dont l'orthocentre est le pied H de la perpendiculaire

abaissée de A sur le plan polaire de A. Considérons le cercle qui admet le triangle PQR comme triangle conjugué ; il a pour centre le point H et le carré de son rayon est égal à $-\overline{HA}^2$. La conique Γ est harmoniquement inscrite à ce cercle, qui est donc harmoniquement circonscrit à Γ et par suite orthogonal au cercle orthoptique de Γ. Si ρ est le rayon du cercle orthoptique de Γ, on a

$$\overline{\omega H}^2 = \rho^2 - \overline{HA}^2,$$

d'où

$$\rho^2 = \overline{\omega H}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{\omega A}^2.$$

Il s'ensuit que la droite ωA est tangente en A à la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et qu'ainsi la puissance de O par rapport à cette sphère est égale à $\overline{OA}^2$. Finalement, on a le théorème suivant :

La sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique a centre est orthogonale à la sphère orthoptique de cette quadrique.

2° **Théorème.** — *La puissance du centre O d'une quadrique Q à centre par rapport à la sphère qui passe par les pieds α, β, γ, δ des perpendiculaires abaissées de O sur les plans des faces d'un tétraèdre conjugué variable* ABCD *par rapport à la quadrique est constante.*

Il suffit de montrer que cette puissance est constante quand le tétraèdre ABCD varie en conservant un sommet A fixe. Le groupe des droites Oβ, Oγ, Oδ varie alors en involution, le cône de base de l'involution étant le cône de sommet O qui se déduit par translation du cône supplémentaire du cône circonscrit à la quadrique de sommet A. Comme les points β, γ, δ varient sur la sphère de diamètre OA, le plan βγδ passe par un point fixe ω. La puissance de ω par rapport à la sphère qui passe par les points α, β, γ, δ est constante ; par suite, la puissance de tout point de la droite αω par rapport à cette sphère est également constante. Le théorème sera établi s'il est démontré que la droite αω passe par O. Or, parmi les tétraèdres conjugués par rapport à Q qui ont pour sommet le point A, il en existe une infinité dont la face ACD est parallèle au plan polaire de A par rapport à Q, dont par suite le sommet B est situé sur la droite AO. Pour chacun de ces tétraèdres, les points γ et δ coïncident avec O, tandis que β est situé sur la droite Oα ; le plan βγδ passe alors par la droite Oα ; le point ω, étant commun à une infinité de tels plans, est donc situé sur la droite Oα.

4. **Indices.** — Soit une quadrique Q à centre unique O. Menons par un point M une droite variable rencontrant la quadrique Q aux

deux points A et A′ et par le point O la parallèle à cette droite, rencontrant la quadrique en deux points dont l'un est α. En appliquant un théorème établi antérieurement sur les coniques (VI, § 1) à une section de Q par un plan quelconque passant par M, on voit facilement que le rapport $\frac{\overline{MA}\,.\,\overline{MA'}}{\overline{O\alpha}^2}$ est indépendant de la droite menée par M. Ce nombre sera dit, d'après Faure, l'*indice du point* M *par rapport à* Q; nous le désignerons, d'une manière générale, par μ.

Comme pour les coniques, la somme des inverses des indices de deux points conjugués M_1 et M_2 par rapport à Q variables sur une droite fixe est constante, le produit des indices de ces deux points conjugués M_1 et M_2 est dans un rapport constant avec le carré de leur distance M_1M_2. Nous désignerons ce rapport sous le nom d'*indice de la droite* M_1M_2, et nous le représenterons, d'une manière générale, par la notation μ_{12}.

Par application du premier théorème fondamental, on voit que

La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle $M_1M_2M_3$ *conjugué variable par rapport à une conique fixe de la quadrique* Q *est constante.*

On a aussi le théorème suivant :

Le produit des indices des sommets du triangle $M_1M_2M_3$ *est dans un rapport constant avec le carré de l'aire du triangle.*

En effet, l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est égale à la moitié du produit de la distance des points M_1 et M_2 par la distance du point M_3 à la droite M_1M_2. Il s'ensuit que le rapport $\frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3}{(\text{aire } M_1M_2M_3)^2}$ a une valeur qui reste constante quand le triangle $M_1M_2M_3$ varie en conservant un sommet fixe M_3 ; par application du premier théorème fondamental, ce rapport reste constant quand le triangle $M_1M_2M_3$ varie d'une façon quelconque.

Nous désignerons ce rapport sous le nom d'*indice du plan* $M_1M_2M_3$, et nous le représenterons par la notation μ_{123}.

Par application du second théorème fondamental, nous obtenons les théorèmes suivants :

1° *La somme des inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué variable par rapport à* Q *est constante.*

2° *Le produit des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué quelconque est dans un rapport constant avec le carré du volume de ce tétraèdre.*

Pour établir ce second théorème, il suffit de considérer le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ comme étant égal au tiers du produit de l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ par la distance du point M_4 au plan $M_1M_2M_3$.

Comme pour les coniques, la somme des inverses des indices de deux droites conjuguées par rapport à une section plane fixe de Q qui varient en passant par un point fixe du plan de cette conique est constante, et le produit des indices de ces deux droites est dans un rapport constant avec le carré du sinus de leur angle.

Par application du premier théorème fondamental, on en déduit que

1° *La somme des inverses des indices des côtés d'un triangle conjugué variable par rapport à une conique fixe de Q est constante,*
et que

2° *La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué variable par rapport à un cône fixe circonscrit à la quadrique Q est constante.*

De ces deux théorèmes, il résulte, par application du second théorème fondamental, que

La somme des inverses des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué variable par rapport à la quadrique Q est constante.

Considérons les trois arêtes M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 du tétraèdre conjugué $M_1M_2M_3M_4$, variant en passant par le point fixe M_1. On a

$$\mu_{41} = \frac{\mu_4 \cdot \mu_1}{\overline{M_4M_1}^2}, \qquad \mu_{42} = \frac{\mu_4 \cdot \mu_2}{\overline{M_4M_2}^2}, \qquad \mu_{43} = \frac{\mu_4 \cdot \mu_3}{\overline{M_4M_3}^2},$$

d'où

$$\mu_{41} \cdot \mu_{42} \cdot \mu_{43} = \mu_4^2 \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{\overline{M_4M_1}^2 \cdot \overline{M_4M_2}^2 \cdot \overline{M_4M_3}^2}.$$

Mais le volume V du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est égal à

$$\frac{1}{6} M_4M_1 \,.\, M_4M_2 \,.\, M_4M_3 \sin(\text{trièdre } M_4);$$

donc,

$$\frac{\mu_{41} \cdot \mu_{42} \cdot \mu_{43}}{\sin^2(\text{trièdre } M_4)} = \frac{\mu_4^2}{36} \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{V^2} = \text{const.}$$

Ainsi,

Le produit des indices des arêtes d'un trièdre conjugué variable par

rapport à un cône circonscrit fixe à la quadrique Q est dans un rapport constant avec le carré du sinus du trièdre.

Considérons les deux plans $M_3M_4M_1$ et $M_3M_4M_2$ variant en passant par la droite fixe M_3M_4. On a

$$\mu_{134} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{(\text{aire } M_1M_3M_4)^2}, \qquad \mu_{234} = \frac{\mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{(\text{aire } M_2M_3M_4)^2},$$

d'où

$$\mu_{134} \cdot \mu_{234} = \mu_3 \cdot \mu_4 \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{(\text{aire } M_1M_3M_4)^2 \cdot (\text{aire } M_2M_3M_4)^2}.$$

Mais le volume V du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est égal à

$$\frac{2}{3}\,\frac{(\text{aire } M_1M_3M_4) \cdot (\text{aire } M_2M_3M_4) \cdot \sin(M_1M_3M_4,\, M_2M_3M_4)}{\overline{M_3M_4}};$$

donc,

$$\frac{\mu_{134} \cdot \mu_{234}}{\sin^2(M_1M_3M_4,\, M_2M_3M_4)} = \frac{4}{9}\,\frac{\mu_3 \cdot \mu_4}{\overline{M_3M_4}^2} \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{V^2} = \text{const.}$$

Par conséquent,

Le produit des indices de deux plans conjugués variables par rapport à Q passant par une même droite fixe est dans un rapport constant avec le carré du sinus de leur angle.

On a

$$\frac{1}{\mu_{134}} + \frac{1}{\mu_{234}} = \frac{1}{\mu_3 \cdot \mu_4}\left[\frac{(\text{aire } M_1M_3M_4)^2}{\mu_1} + \frac{(\text{aire } M_2M_3M_4)^2}{\mu_2}\right]$$
$$= \frac{d^2}{\mu_3 \cdot \mu_4}\left[\frac{(\text{aire } M_1M_3M_4)^2}{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1\omega}} + \frac{(\text{aire } M_2M_3M_4)^2}{\overline{M_2M_1} \cdot \overline{M_2\omega}}\right],$$

ω étant le milieu de la corde de Q située sur la droite M_1M_2, d étant la demi-longueur du diamètre de Q parallèle à la droite M_1M_2. D'après le théorème de Stewart généralisé, la parenthèse est égale à

$$\frac{\overline{M_3M_4}^2}{4}\sin^2(M_1M_2,\, M_3M_4) - \frac{(\text{aire } \omega M_3M_4)^2}{\overline{\omega M_1} \cdot \overline{\omega M_2}},$$

et, comme le produit $\overline{\omega M_1} \cdot \overline{\omega M_2}$ est constant, on voit que l'on a

$$\frac{1}{\mu_{134}} + \frac{1}{\mu_{234}} = \text{const.}$$

Donc,

La somme des inverses des indices de deux plans conjugués par rapport à Q variant en passant par une même droite fixe est constante.

Le premier théorème fondamental permet d'en déduire que

La somme des inverses des indices des faces d'un trièdre conjugué variable par rapport à un cône fixe circonscrit à Q est constante.

De ce théorème, on déduit, par application du second théorème fondamental, que

La somme des inverses des indices des faces d'un tétraèdre conjugué quelconque par rapport à la quadrique est constante (1).

(1) J. Neuberg, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870.

CHAPITRE XI

THÉORÈMES RELATIFS AUX FAISCEAUX LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE QUADRIQUES

---

1. Théorème. — *Les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel sont rencontrées par un plan suivant les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel.*

En effet, soient Σ_1, Σ_2, Σ_3 trois de ces quadriques et Γ_1, Γ_2, Γ_3 les coniques d'intersection de ces quadriques avec un plan Π. L'une quelconque des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 passe par les points communs aux deux autres ; il s'ensuit que chacune de ces coniques appartient au faisceau linéaire qui contient les deux autres. En définitive, les coniques d'intersection du plan Π avec les quadriques considérées forment un faisceau linéaire ponctuel.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité au théorème précédent, on obtient le théorème suivant :

Les cônes qui ont pour sommet un point donné et qui sont circonscrits aux quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel forment un faisceau linéaire tangentiel de cônes de la seconde classe.

2. Applications. — 1° En général, un plan Π rencontre la biquadratique L commune aux quadriques Σ d'un faisceau linéaire ponctuel en quatre points distincts A, B, C, D. Les coniques Γ d'intersection des quadriques Σ avec le plan Π passent par ces quatre points. Parmi ces coniques, il en existe trois qui sont décomposées en deux droites ; une telle conique est la section par Π d'une quadrique Σ qui est en général tangente au plan Π. On a ainsi le théorème suivant :

Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe en général trois qui sont tangentes à un plan.

Les points de contact sont les sommets du triangle conjugué commun aux coniques Γ.

En particulier, supposons que le plan Π soit le plan à l'infini. Une quadrique tangente au plan à l'infini étant un paraboloïde ou un cylindre, on voit que

Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel, il existe en général trois paraboloïdes ou cylindres.

2° Pour que les coniques Γ d'un faisceau linéaire ponctuel soient bitangentes entre elles en deux points A et B, il faut et il suffit que parmi ces coniques il en existe une décomposée en deux droites confondues avec la droite AB. D'autre part, pour que la section d'une quadrique Σ par un plan Π soit une conique décomposée en deux droites confondues, il faut et il suffit que la quadrique Σ soit un cône tangent au plan Π. On voit ainsi que l'on a le théorème suivant :

L'enveloppe des plans qui rencontrent deux quadriques données Σ_1 et Σ_2 suivant deux coniques bitangentes est formée par les cônes du second degré qui appartiennent au faisceau linéaire ponctuel contenant les quadriques Σ_1 et Σ_2.

Ces cônes sont, en général, en nombre égal à quatre.

Le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Le lieu des cordes d'une biquadratique qui sont telles que les tangentes aux extrémités soient situées dans un même plan se compose des cônes du second degré qui passent par cette biquadratique.

3° Par application du principe de dualité aux résultats précédents, on obtient les résultats suivants :

Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel, il en existe en général trois qui passent par un point donné.

Les plans tangents en ce point aux trois quadriques sont les plans des faces du trièdre conjugué commun aux cônes circonscrits aux quadriques du faisceau donné qui ont pour sommet le point donné.

Le lieu des points tels que les cônes circonscrits à deux quadriques Σ_1 et Σ_2 qui ont pour sommet l'un quelconque d'entre eux soient tangents l'un à l'autre le long de deux droites communes est formé des coniques qui appartiennent, comme quadriques dégénérées, au faisceau linéaire tangentiel contenant les quadriques Σ_1 et Σ_2.

3. Théorème. — *Les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel sont rencontrées par une droite en les couples de points d'une involution.*

En effet, coupons les quadriques par un plan Π passant par la droite donnée Δ. Les coniques d'intersection forment un faisceau linéaire ponctuel; d'après le théorème de Desargues, elles sont rencontrées par la droite Δ en les couples de points d'une involution; or, ces couples de points sont aussi les couples de points d'intersection des quadriques avec la droite Δ.

Comme conséquence de ce théorème, on a le résultat suivant:

Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe en général deux qui sont tangentes à une droite donnée.

Les points de contact sont les points doubles de l'involution précédente.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on obtient les théorèmes suivants:

1° *Les couples de plans tangents menés par une droite donnée aux quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel appartiennent à une même involution.*

2° *Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel, il en existe deux qui sont tangentes à une droite donnée.*

Les plans tangents aux points de contact avec cette droite sont les plans doubles de l'involution précédente.

4. Théorème. — *Les plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques Q d'un faisceau linéaire ponctuel passent par une même droite Δ.*

Soient en effet Π_1 et Π_2 les plans polaires de P par rapport à deux quadriques Q_1 et Q_2 du faisceau. En général, ces deux plans sont distincts et ont une droite commune Δ. Les quadriques Q du faisceau sont coupées par le plan Π' qui passe par P et par Δ suivant les coniques Γ d'un faisceau linéaire ponctuel. Or, le point P a la même polaire Δ par rapport aux coniques Γ_1 et Γ_2 d'intersection des quadriques Q_1 et Q_2 avec le plan Π'; il a donc même polaire Δ par rapport à toutes les coniques Γ; autrement dit, les plans polaires Π de P par rapport aux quadriques Q passent tous par Δ.

Il peut arriver que les plans Π_1 et Π_2 soient confondus suivant un plan Π; alors le raisonnement précédent s'applique à toute droite Δ de ce plan Π. Il en résulte que les plans polaires de P par rapport

aux quadriques Q sont tous confondus avec le plan Π. On voit que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que P soit un point double d'un cône du second degré proprement dit ou décomposé faisant partie du faisceau linéaire considéré.

En supposant que P n'a pas même plan polaire par rapport aux quadriques Q, montrons que *tout plan* Π *passant par* Δ *est le plan polaire de* P *par rapport à une quadrique* Q. En effet, soit un tel plan Π. Menons par P une droite quelconque L rencontrant Π en un point I non situé sur Δ. Pour que la quadrique Q soit telle que le plan polaire de P par rapport à cette quadrique coïncide avec le plan Π, il faut et il suffit que le couple des points d'intersection de cette quadrique avec la droite L fasse partie de l'involution qui a pour points doubles P et I et par suite soit commun à cette involution et à l'involution formée par les couples de points d'intersection de la droite L avec les quadriques Q. Or, ces deux involutions sont distinctes, sinon le point P aurait le même plan polaire Π par rapport aux quadriques Q ; étant distinctes, elles ont un couple commun et un seul, et la proposition est établie.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on a le théorème suivant :

Les pôles d'un plan Π *par rapport aux quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel sont sur une même droite* Δ.

Il peut arriver que le plan Π ait même pôle par rapport aux quadriques du faisceau ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le plan Π soit le plan d'une quadrique du faisceau dégénérée en une conique.

Si l'on suppose que le plan Π n'a pas même pôle par rapport aux quadriques du faisceau, tout point de la droite Δ est le pôle de Π par rapport à une de ces quadriques.

En particulier, supposons que Π soit le plan à l'infini ; on a alors le théorème suivant :

Le lieu des centres des quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel est une droite. Son point à l'infini est le point à l'infini dans la direction asymptotique double du paraboloïde du faisceau.

5. Théorème. — *Le rapport anharmonique des plans polaires d'un point variable de l'espace par rapport à quatre quadriques fixes d'un faisceau linéaire ponctuel est constant.*

Soient en effet une quadrique Σ variable d'un faisceau linéaire

ponctuel donné et deux points fixes P et P′. Considérons les deux droites fixes Δ et Δ' par lesquelles passent respectivement les plans polaires variables Π et Π' de P et de P′ par rapport à Σ. Menons par la droite PP′ un plan H rencontrant Σ suivant une conique variable Γ qui appartient à un faisceau linéaire ponctuel fixe. Ce plan rencontre les deux droites Δ et Δ' en deux points O et O′ et les deux plans Π et Π' suivant deux droites δ et δ' qui passent respectivement par O et O′ et qui sont les polaires de P et de P′ respectivement par rapport à Γ. Or, on sait que ces deux droites se correspondent homographiquement (III, § 2) ; il s'ensuit que les deux plans Π et Π' se correspondent homographiquement, et qu'ainsi le rapport anharmonique des plans polaires de P par rapport à quatre quadriques Σ est égal au rapport anharmonique des plans polaires de P′ par rapport à ces quatre quadriques.

La valeur constante du rapport anharmonique des plans polaires d'un point variable de l'espace par rapport à quatre quadriques fixes d'un faisceau linéaire ponctuel est dite *rapport anharmonique de ces quatre quadriques*. Ce nombre est en particulier égal au rapport anharmonique des quatre plans tangents à ces quadriques en un point quelconque de leur biquadratique commune.

Théorème corrélatif. — Par application du principe de dualité, on obtient le théorème suivant :

Le rapport anharmonique des pôles d'un plan variable par rapport à quatre quadriques fixes d'un faisceau linéaire tangentiel est constant.

Ce nombre constant est dit *rapport anharmonique des quatre quadriques*.

6. A chaque point P de l'espace il correspond une droite Δ commune aux plans polaires de P par rapport aux quadriques Σ d'un faisceau linéaire ponctuel. L'ensemble des droites Δ est donc un complexe, que nous appellerons le *complexe polaire* relatif au faisceau linéaire ponctuel considéré.

Relativement au complexe polaire, on a les théorèmes suivants :

1° *Quand le point* P *décrit une droite* L, *la droite* Δ *décrit une quadrique* U, *qui est aussi le lieu des droites conjuguées de* L *par rapport aux quadriques* Σ.

En effet, soient deux points P et P′ de la droite L, Δ et Δ' les droites du complexe polaire qui correspondent aux points P et P′. La droite D conjuguée de L par rapport à une quadrique Σ

est dans le plan polaire Π de P par rapport à Σ et aussi dans le plan polaire Π' de P' par rapport à Σ. Quand la quadrique Σ varie, les deux plans Π et Π', d'après un théorème établi au paragraphe précédent, se correspondent homographiquement ; le lieu de leur droite D d'intersection est donc une quadrique U, qui passe par les droites Δ et Δ', et qui est ainsi le lieu de la droite Δ du complexe polaire lorsque le point P auquel elle correspond décrit la droite L.

La droite conjuguée d'une droite L par rapport à un cône du second degré passant par le sommet du cône, on voit que la quadrique U passe par le sommet de tout cône du second degré appartenant au faisceau linéaire ponctuel des quadriques Σ.

En général, la quadrique U est proprement dite. Pour qu'elle soit un cône, il faut et il suffit que les droites Δ et Δ' aient un point commun. Si ces deux droites ont un point commun A, le plan polaire de A par rapport à une quadrique Σ quelconque passe par P et P' et par suite par la droite L ; ainsi la droite L appartient au complexe polaire. Réciproquement, si la droite L appartient au complexe polaire et est ainsi la droite commune aux plans polaires d'un point A par rapport aux quadriques Σ, les droites D conjuguées de L par rapport aux quadriques Σ passent toutes par A, et la quadrique U est un cône.

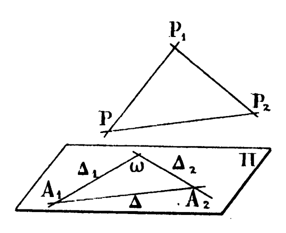
On appelle *cône d'un complexe de droites ayant pour sommet le point* A le lieu des droites du complexe qui passent par A. On a le théorème suivant :

Le cône du complexe polaire qui a pour sommet un point A *est un cône du second degré, qui est aussi le lieu des droites conjuguées par rapport aux quadriques* Σ *de la droite du complexe qui correspond au point* A.

2° *Dans tout plan* Π, *il existe une infinité de droites* Δ *du complexe polaire, et leur enveloppe dans ce plan est une conique* Γ. *En outre, le lieu des points* P *auxquels il correspond les droites* Δ *du complexe situées dans le plan* Π *est, en général, une cubique gauche qui est aussi le lieu des pôles du plan* Π *par rapport aux quadriques* Σ.

En effet, il est d'abord immédiat que pour qu'une droite Δ du complexe soit située dans le plan Π, il faut et il suffit que le point P auquel elle correspond soit pôle du plan Π par rapport à une quadrique Σ. Cela posé, soient dans le plan Π deux droites fixes Δ_1 et Δ_2 et une droite variable Δ appartenant au complexe ; elles correspondent respectivement aux points fixes P_1 et P_2 et au point variable P. Les droites PP_1 et PP_2 sont des droites du complexe, qui correspondent respectivement aux points de rencontre A_1 et A_2 de Δ avec les droites Δ_1 et Δ_2. Pour la même raison, la droite P_1P_2 est une

droite du complexe, qui correspond au point ω d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2. Cette droite P_1P_2 étant ainsi sur le cône du complexe qui a pour sommet P_1, il existe une quadrique Σ' du faisceau donné telle que la droite P_1P_2 soit conjuguée de Δ_1 par rapport à Σ', de façon que le plan PP_1P_2 soit le plan polaire de A_1 par rapport à Σ'. Désignons par I le point d'intersection du plan PP_1P_2 avec la droite Δ_1; les points I et A_1 sont conjugués par rapport à Σ', et, quand Δ varie, les points I et A_1 se correspondent homographiquement. Il s'ensuit que si l'on considère quatre positions de Δ, le rapport anharmonique des quatre positions correspondantes de A_1 est égal au rapport anharmonique des quatre plans PP_1P_2. De même, le rapport anharmonique des quatre points A_2 est égal au rapport anharmonique des quatre plans PP_1P_2. Il en résulte que les points A_1 et A_2 se correspondent homographiquement, et que la droite Δ enveloppe une conique Γ.



D'autre part, le point P est situé à la fois sur les deux cônes du complexe qui ont pour sommets P_1 et P_2. Ces cônes du second degré ont en commun la droite P_1P_2; le reste de leur intersection est une cubique gauche, qui est le lieu du point P.

Cette cubique gauche passe par les sommets des cônes du faisceau et rencontre le plan Π aux trois points de contact avec le plan Π des quadriques Σ qui sont tangentes au plan Π.

Si l'on suppose que Δ, variant en restant tangente à Γ, tende vers Δ_1, le point A_1 tend vers le point de contact de Δ_1 avec Γ. Dans les mêmes conditions, le point P varie sur la cubique gauche en tendant vers P_1 et la droite PP_1 tend vers la tangente en P_1 à la cubique. On voit ainsi que

Les tangentes à la cubique gauche appartiennent au complexe polaire et correspondent aux points de la conique Γ.

On appelle *courbe d'un complexe de droites située dans un plan* Π l'enveloppe des droites du complexe qui sont situées dans ce plan Π. Ainsi,

La courbe du complexe polaire située dans un plan est une conique.

3° *Le lieu des points* P *tels que les droites* Δ *correspondantes du complexe polaire rencontrent une droite donnée* L *est la quadrique* U, *lieu des droites conjuguées de* L *par rapport aux quadriques* Σ.

En effet, soit P un tel point. Il existe une quadrique Σ telle que le plan polaire de P par rapport à Σ contienne la droite L. La droite conjuguée de L par rapport à Σ passe par le point P, qui est ainsi situé sur la quadrique U. Réciproquement, P étant un point de la quadrique U, il existe une droite passant par P, située sur U et conjuguée de L par rapport à une quadrique Σ; le plan polaire de P par rapport à cette quadrique passe par L, et par suite la droite Δ du complexe polaire qui correspond au point P rencontre la droite L.

4° *Quand la droite* L *varie arbitrairement dans un plan fixe* Π, *la quadrique* U *qui lui correspond passe constamment par la cubique gauche lieu des pôles du plan* Π *par rapport aux quadriques* Σ.

En effet, la droite Δ du complexe qui correspond à un point P quelconque de cette cubique rencontre toute droite L du plan Π ; on voit ainsi que tout point de la cubique est situé sur toute quadrique U correspondant à une droite L du plan Π.

7. A chaque plan Π de l'espace il correspond une droite Δ, lieu des pôles du plan Π par rapport aux quadriques Σ d'un faisceau linéaire tangentiel. L'ensemble des droites Δ est donc un complexe, que nous appellerons le *complexe polaire* relatif au faisceau linéaire tangentiel considéré.

Relativement à ce complexe, on a les théorèmes suivants, qui se déduisent par dualité des théorèmes qui viennent d'être établis.

1° *Quand le plan variable* Π *passe par une droite fixe* L, *la droite* Δ *décrit une quadrique* U, *qui est aussi le lieu des droites conjuguées de* L *par rapport aux quadriques* Σ.

Cette quadrique U est tangente au plan de toute conique faisant partie, à titre de quadrique dégénérée, du faisceau linéaire tangentiel des quadriques Σ.

En général, la quadrique U est proprement dite. Pour qu'elle dégénère en une conique, il faut et il suffit que la droite L appartienne au complexe. On a le théorème suivant :

La courbe du complexe polaire qui est située dans un plan Π *est une conique qui est aussi l'enveloppe des droites conjuguées par rapport aux quadriques* Σ *de la droite du complexe qui correspond au plan* Π.

2° *Le cône du complexe qui a pour sommet un point* A *est un cône du second degré. En outre, l'enveloppe des plans* Π *auxquels il correspond les droites* Δ *du complexe qui passent par* A *est, en général, une développable de la troisième classe, qui est aussi l'enveloppe des plans polaires du point* A *par rapport aux quadriques* Σ.

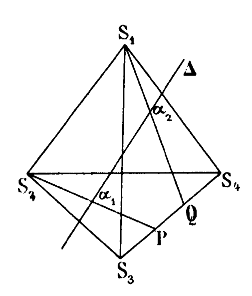
Les génératrices rectilignes de la développable appartiennent au complexe et correspondent aux plans tangents au cône du complexe de sommet A.

3° *L'enveloppe des plans* Π *tels que les droites* Δ *correspondantes du complexe rencontrent une droite donnée* L *est la quadrique* U, *lieu des droites conjuguées de* L *par rapport aux quadriques* Σ.

4° *Quand la droite* L *varie arbitrairement en passant par un point fixe* A, *la quadrique* U *qui lui correspond reste inscrite à la développable de la troisième classe enveloppe des plans polaires du point* A *par rapport aux quadriques* Σ.

8. Complexe tétraédral. — On appelle *complexe tétraédral* l'ensemble des droites Δ telles que le rapport anharmonique des points d'intersection de l'une quelconque d'entre elles avec les quatre faces d'un tétraèdre donné prises dans un ordre donné ait une valeur donnée.

Nous allons démontrer que *le rapport anharmonique des plans qui passent par une droite* Δ *et les quatre sommets* S_1, S_2, S_3, S_4 *d'un tétraèdre est égal au rapport anharmonique des points d'intersection de cette droite avec les quatre faces respectivement opposées de ce tétraèdre.*



Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les points de rencontre de Δ avec les faces du tétraèdre respectivement opposées à S_1, S_2, S_3, S_4. Les droites $S_2\alpha_1$ et $S_1\alpha_2$ rencontrent S_3S_4 respectivement aux deux points P et Q. Le rapport anharmonique ρ des quatre plans qui passent par Δ et respectivement par S_1, S_2, S_3, S_4 est égal au rapport anharmonique des quatre points Q, P, S_3, S_4. D'autre part, le rapport anharmonique ρ' des quatre points α_1, α_2, α_3, α_4 est égal au rapport anharmonique des quatre plans qui passent par la droite S_1S_2 et respectivement par ces quatre points, et celui-ci est égal au rapport anharmonique des quatre points P, Q, S_4, S_3. Or, on a

$$(QPS_3S_4) = (PQS_4S_3);$$

on a donc $\rho = \rho'$ [1].

[1] C. Guichard, *Compléments de géométrie*.

Un complexe tétraédral est donc aussi l'ensemble des droites Δ telles que le rapport anharmonique des quatre plans qui passent par l'une quelconque d'entre elles et les quatre sommets d'un tétraèdre ait une valeur donnée.

Soit un faisceau linéaire ponctuel de quadriques Σ contenant quatre cônes du second degré distincts, de sommets S_1, S_2, S_3, S_4; le tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$ est conjugué par rapport à chacune des quadriques Σ. Soient une droite Δ du complexe polaire relatif au faisceau linéaire ponctuel et le point P auquel elle correspond. Les plans polaires de P par rapport aux quatre cônes du faisceau sont les quatre plans qui passent par Δ et respectivement par les points S_1, S_2, S_3, S_4; le rapport anharmonique de ces quatre plans est, comme nous l'avons vu, indépendant de la position du point P (§ 5). On voit ainsi que *le complexe polaire est un complexe tétraédral.*

Nous allons établir que, réciproquement, *tout complexe tétraédral peut être regardé comme le complexe polaire relatif à un faisceau linéaire ponctuel de quadriques admettant le tétraèdre du complexe comme tétraèdre conjugué.*

Montrons d'abord qu'étant donnés dans un plan un triangle ABC, un point P et une droite Δ, il existe une conique admettant le triangle ABC comme triangle conjugué et telle que la polaire de P par rapport à la conique soit la droite Δ. En effet, soit une conique quelconque passant par les points A, B, C, P; elle rencontre Δ en deux points Q et R. Comme les deux triangles ABC et PQR sont inscrits à une même conique, il existe une conique Γ qui admet les deux triangles ABC et PQR comme triangles conjugués; cette conique Γ passe bien par les points A, B, C et la polaire de P par rapport à cette conique est bien la droite Δ.

Il s'ensuit qu'étant donnés dans l'espace un trièdre S(ABC), un point P et une droite Δ, il existe un cône du second degré admettant le trièdre S(ABC) comme trièdre conjugué et tel que le plan polaire de P par rapport au cône passe par la droite Δ.

Cela posé, soient un tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$, un point quelconque P et une droite quelconque Δ. Soient un cône Σ_1 du second degré, de sommet S_1, admettant le trièdre $S_1(S_2S_3S_4)$ comme trièdre conjugué, et tel que le plan polaire de P par rapport au cône passe par Δ, et un cône Σ_2 du second degré, de sommet S_2, admettant le trièdre $S_2(S_1S_3S_4)$ comme trièdre conjugué, et tel que le plan polaire de P par rapport au cône passe par Δ. Le point S_3 a même plan polaire, le plan $S_1S_2S_4$, par rapport aux deux cônes Σ_1 et Σ_2; de même, le point S_4 a même plan polaire, le plan $S_1S_2S_3$, par rapport à ces deux cônes. Si donc l'on considère le faisceau linéaire ponctuel

de quadriques qui contient les cônes Σ_1 et Σ_2, il contient aussi deux cônes de sommets S_3 et S_4, et ainsi le tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$ est conjugué par rapport à chacune des quadriques du faisceau. Il s'ensuit que le complexe tétraédral relatif au tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$, qui contient la droite arbitraire Δ, est le complexe polaire relatif au faisceau linéaire ponctuel considéré.

Par application du principe de dualité, on a aussi les théorèmes suivants :

1° *Le complexe polaire relatif à un faisceau linéaire tangentiel de quadriques qui contient quatre quadriques distinctes dégénérées en coniques est un complexe tétraédral relatif au tétraèdre qui a pour faces les plans de ces quatre coniques.*

2° *Réciproquement, tout complexe tétraédral peut être regardé comme le complexe polaire relatif à un faisceau linéaire tangentiel de quadriques admettant le tétraèdre du complexe comme tétraèdre conjugué.*

9. Propriétés du complexe tétraédral. — Soit un complexe tétraédral relatif au tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$. Toute droite passant par un sommet du tétraèdre appartient au complexe, de même que toute droite située dans le plan d'une face du tétraèdre. Le cône du complexe qui a pour sommet un point quelconque A de l'espace est du second degré, et il contient les quatre droites AS_1, AS_2, AS_3 et AS_4 ; le rapport anharmonique de ces quatre droites sur le cône est indépendant de la position de A. La courbe du complexe située dans un plan Π est une conique, qui est tangente aux droites d'intersection du plan Π avec les plans des quatre faces du tétraèdre ; le rapport anharmonique des quatre tangentes est indépendant de la position du plan Π, et il est égal au rapport anharmonique précédent.

10. Applications. — Nous avons vu que le lieu des pôles d'un plan fixe Π par rapport aux quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel est une cubique gauche, qui passe par les sommets des cônes du faisceau et par les points de contact avec le plan Π des quadriques du faisceau qui sont tangentes à ce plan.

En particulier, si le plan Π est le plan à l'infini, on voit qu'en général

Le lieu des centres des quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel est une cubique gauche $\mathcal{C}$, qui passe par les sommets des cônes du faisceau et par les points de contact avec le plan à l'infini des paraboloïdes du faisceau.

Si le faisceau contient une sphère, les points de contact avec le plan à l'infini des paraboloïdes du faisceau sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport au cercle à l'infini. Par suite, les directions asymptotiques de la cubique $\mathcal{C}$ sont deux à deux rectangulaires; on dit alors que la cubique est *équilatère*. Ces directions asymptotiques sont d'ailleurs les directions principales de chacune des quadriques du faisceau.

Tout point P de la cubique étant le centre d'une quadrique du faisceau, la droite correspondante Δ du complexe polaire relatif au faisceau est à l'infini. Le plan polaire de P par rapport à une quadrique quelconque du faisceau est donc parallèle au plan polaire de P par rapport à la sphère du faisceau. Si I est le centre de cette sphère, on voit que la droite IP est perpendiculaire au plan polaire de P par rapport à une quadrique du faisceau. Ainsi,

Le lieu des points P *tels que la perpendiculaire menée par l'un quelconque d'entre eux au plan polaire de ce point par rapport à une quadrique* Σ *à centre unique passe par un point fixe* I *est une cubique gauche* $\mathcal{C}$ *qui passe par le point* I, *par le centre de* Σ *et par les points à l'infini dans les directions principales de la quadrique.*

Cette cubique est dite *cubique d'Apollonius relative au point* I.

Les six points de rencontre de cette cubique avec la quadrique sont les pieds des normales menées de I à la quadrique. Donc,

D'un point quelconque I *on peut mener à une quadrique* Σ *à centre unique à distance finie six normales. Les pieds des six normales sont sur une cubique gauche équilatère qui passe par* I, *par le centre de la quadrique et par les points à l'infini dans les directions principales de cette quadrique.*

Le cône qui a pour sommet le point I et passe par la cubique est un cône du second degré. Donc,

Les six normales menées d'un point I *à une quadrique à centre sont sur un cône du second degré, dit* cône de Chasles relatif au point I.

Si la quadrique considérée est non plus une quadrique à centre, mais un paraboloïde, l'un des points de rencontre de la cubique et de la quadrique est le point de contact de cette quadrique avec le plan à l'infini. On voit ainsi que

D'un point quelconque I *on peut mener à un paraboloïde cinq normales. Ces cinq normales et la parallèle à l'axe du paraboloïde menée par* I *sont sur un même cône du second degré, dit encore* cône de Chasles relatif au point I.

11. Quadriques homofocales à centre. — Soit une quadrique Σ_0 non de révolution, à centre unique O à distance finie, et considérons le faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ_0 et le cercle à l'infini.

Ce faisceau linéaire tangentiel de quadriques Σ contient, outre le cercle à l'infini, trois quadriques dégénérées en coniques. Les plans de ces coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 forment avec le plan à l'infini un tétraèdre conjugué commun aux quadriques Σ. L'une de ces quadriques étant le cercle à l'infini, les plans des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont rectangulaires deux à deux et sont ainsi les plans principaux d'une quadrique quelconque Σ. Ainsi, *les quadriques Σ ont même centre O et mêmes plans principaux.*

Les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont dites les *coniques focales* de l'une quelconque des quadriques Σ, lesquelles sont dites *homofocales*.

Ces quadriques homofocales Σ ont les propriétés suivantes, qui résultent des théorèmes généraux relatifs aux faisceaux linéaires tangentiels de quadriques.

1° Les cônes S circonscrits aux quadriques Σ qui ont pour sommet commun un point quelconque P forment un faisceau linéaire tangentiel qui contient le cône isotrope de sommet P. Ces cônes ont mêmes plans principaux et sont homofocaux. *Parmi les quadriques Σ, il en existe trois qui passent par P ; les plans tangents à ces quadriques en P sont les plans principaux des cônes S ; ces trois plans sont deux à deux rectangulaires, et ainsi, deux quadriques Σ sont orthogonales en chacun des points de leur biquadratique d'intersection. Les droites qui passent par P et qui sont situées sur les quadriques Σ qui passent par P sont les droites focales communes aux cônes S.*

2° *Parmi les quadriques Σ, il en existe deux qui sont tangentes à une droite donnée* L. Les plans tangents à ces deux quadriques aux points de contact avec L sont les plans doubles d'une involution qui contient le couple des plans tangents au cercle à l'infini menés par L ; *ces deux plans doubles sont donc rectangulaires.*

3° Soient une de ces quadriques Σ et le cercle à l'infini. Le lieu des points P tels que le cône circonscrit à Σ ayant pour sommet un de ces points soit de révolution est le lieu des points P tels que les cônes circonscrits à Σ et au cercle à l'infini ayant pour sommet commun un de ces points soient tangents l'un à l'autre le long de deux droites communes ; *il est formé par les trois focales* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *de la quadrique* Σ.

Les cônes S qui ont pour sommet un point P d'une de ces focales et qui sont circonscrits aux quadriques Σ sont tangents au cône

isotrope de sommet P le long de deux mêmes droites de ce cône ; autrement dit, ces cônes S sont de révolution autour d'un même axe Δ, qui est d'ailleurs la tangente en P à la focale considérée.

La sphère de rayon nul qui a pour centre le point P est bitangente à chacune des quadriques Σ. Si Q et Q′ sont les points de contact de cette sphère avec une quadrique Σ, les deux surfaces se rencontrent suivant deux coniques qui passent par Q et Q′. Le point P est dit un *foyer* de la quadrique Σ, et la droite QQ′ est dite la *directrice* correspondant à ce foyer, par rapport à la quadrique Σ. La droite QQ′ est conjuguée par rapport à Σ de la tangente en P à la focale sur laquelle se trouve le point P.

4° Les pôles d'un plan fixe Π par rapport aux quadriques homofocales Σ sont situés sur une droite Δ. Le pôle du plan Π par rapport au cercle à l'infini étant à l'infini dans la direction des droites perpendiculaires au plan Π, la droite Δ est perpendiculaire au plan Π. La droite Δ passe par le point de contact M avec le plan Π de la quadrique Σ qui est tangente à ce plan, et elle est normale en M à cette quadrique. On voit ainsi que *le complexe polaire relatif au faisceau linéaire tangentiel des quadriques homofocales Σ est aussi le complexe des normales à ces quadriques.*

5° Soit une droite Δ du complexe, lieu des pôles d'un plan Π, qui lui est perpendiculaire, par rapport aux quadriques Σ. La droite conjuguée de Δ par rapport à l'une quelconque des quadriques Σ est située dans le plan Π, et l'on voit ainsi qu'une droite Δ du complexe est perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à l'une quelconque des quadriques Σ. Réciproquement, soit une droite Δ perpendiculaire à sa conjuguée Δ'_0 par rapport à une quadrique Σ, soit Σ_0. Par la droite Δ'_0 il passe un plan Π perpendiculaire à Δ ; le lieu des pôles de ce plan par rapport aux quadriques Σ est une droite qui, comme Δ, est perpendiculaire au plan Π et qui, comme Δ, passe par le pôle de Π par rapport à la quadrique Σ_0 ; elle coïncide donc avec Δ. Ainsi,

Le complexe polaire relatif aux quadriques Σ est l'ensemble des droites dont chacune est perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à une quadrique Σ et par conséquent perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à toute quadrique Σ.

Montrons, d'après cela, que le complexe polaire contient les axes des coniques situées sur les surfaces Σ. En effet, soit un axe Δ d'une section plane d'une surface Σ ; A et A′ étant les extrémités de cet axe, la droite Δ' conjuguée de Δ par rapport à Σ est la droite d'intersection des plans tangents en A et A′ à Σ. Mais, les tangentes en

A et A′ à la section plane sont perpendiculaires à Δ ; il s'ensuit que la droite Δ′ est parallèle à chacune de ces deux tangentes et perpendiculaire à Δ.

Soit encore la perpendiculaire Δ à un plan Π menée par le centre ω de la section d'une quadrique Σ par ce plan. La droite conjuguée Δ′ de Δ par rapport à Σ est située dans le plan polaire de ω par rapport à Σ, lequel plan est parallèle au plan Π ; on voit ainsi que Δ′ est perpendiculaire à Δ ; la droite Δ fait donc partie du complexe.

On a, d'après cela, les théorèmes suivants :

Le lieu des axes des sections planes des quadriques Σ qui ont pour centre un point donné ω est le cône du complexe polaire qui a pour sommet ω.

Le lieu des perpendiculaires en ω aux plans de ces coniques est aussi le cône du complexe de sommet ω. Il s'ensuit que l'enveloppe des plans qui rencontrent les quadriques Σ suivant des coniques ayant un centre donné ω est le cône supplémentaire du cône du complexe de sommet ω.

Enfin, soit une corde AB d'une quadrique Σ telle que les normales en A et B soient dans un même plan. Il est immédiat que la droite AB est perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à Σ, qui est la droite d'intersection des plans tangents à Σ en A et B ; donc, *la droite* AB *fait partie du complexe.*

6° Le complexe polaire est tétraédral. Donc, si M_1, M_2, M_3 sont les points d'intersection d'une droite Δ du complexe avec les plans principaux des quadriques Σ contenant respectivement les coniques focales Γ_1, Γ_2, Γ_3, *le rapport* $\frac{M_1M_2}{M_1M_3}$ *est constant.*

7° Le rapport anharmonique des pôles d'un plan Π par rapport à quatre quadriques Σ est indépendant de la position du plan Π. En prenant pour trois de ces quadriques le cercle à l'infini et les deux focales Γ_1 et Γ_2, on obtient le théorème suivant :

M *étant un point quelconque d'une quadrique* Σ, *si* M_1 *et* M_2 *sont les points de rencontre de la normale en* M *avec deux plans principaux, le rapport* $\frac{MM_1}{MM_2}$ *est constant.*

8° Le lieu des droites conjuguées d'une droite donnée L par rapport aux quadriques Σ et le lieu des normales aux points de contact des quadriques Σ avec les plans tangents menés à ces quadriques par la droite L sont une seule et même quadrique U, qui est en

général proprement dite, et qui est inscrite au tétraèdre conjugué commun aux quadriques Σ ; c'est donc un paraboloïde hyperbolique tangent aux trois plans principaux des quadriques Σ.

Pour que cette quadrique U dégénère en une conique, il faut et il suffit que la droite L appartienne au complexe. On a le théorème suivant :

La courbe du complexe située dans un plan Π *est une parabole tangente aux droites d'intersection du plan* Π *avec les plans principaux des quadriques* Σ.

9° *Le cône du complexe qui a pour sommet un point* A *est un cône du second degré qui passe par le centre* O *des quadriques* Σ *et par les parallèles aux axes de ces quadriques menées par* A.

Ce cône est le cône de Chasles de sommet A relatif à chacune des quadriques Σ..

L'enveloppe des plans Π *auxquels il correspond les droites* Δ *du complexe qui passent par* A *est, en général, une développable de la troisième classe, qui est aussi l'enveloppe des plans polaires de* A *par rapport aux quadriques* Σ. *Cette développable est tangente au plan à l'infini et aux plans principaux des quadriques* Σ.

L'enveloppe des plans Π *tels que les droites* Δ *correspondantes du complexe rencontrent une droite donnée* L *est le paraboloïde hyperbolique* U *lieu des droites conjuguées de* L *par rapport aux quadriques* Σ. *Si la droite* L *fait partie du complexe, cette enveloppe est une parabole.*

12. Paraboloïdes homofocaux. — Soit un paraboloïde Σ_0 non de révolution, et considérons le faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ_0 et le cercle à l'infini.

Les quadriques Σ de ce faisceau sont toutes tangentes au même point au plan à l'infini ; ce sont des paraboloïdes ayant même direction asymptotique double. Parmi ces quadriques se trouvent, outre le cercle à l'infini, deux quadriques dégénérées en coniques tangentes au plan à l'infini ; ces deux coniques sont des paraboles, qui sont dites les *paraboles focales* de l'un quelconque des paraboloïdes Σ, lesquels sont dits *homofocaux*.

Le plan de chacune des paraboles focales a même pôle, dans le plan à l'infini, par rapport à un paraboloïde Σ et par rapport au cercle à l'infini ; c'est donc un plan principal de Σ. Ainsi, *les paraboloïdes* Σ *ont mêmes plans principaux.*

On a les théorèmes suivants :

1° *Par un point P de l'espace, il passe trois paraboloïdes homofocaux à Σ_0, et les plans tangents en P à ces trois quadriques sont deux à deux rectangulaires.*

2° *Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à un paraboloïde Σ est formé des deux paraboles focales de ce paraboloïde.*

Un point quelconque d'une focale est encore dit un *foyer* de chacun des paraboloïdes Σ ; la sphère de rayon nul qui a pour centre un foyer touche un paraboloïde Σ en deux points, et la droite qui joint ces deux points est encore dite la *directrice* correspondant au foyer, par rapport au paraboloïde Σ.

3° *Le lieu des pôles d'un plan Π par rapport aux paraboloïdes Σ est une droite Δ perpendiculaire au plan Π.*

4° *Le complexe des droites Δ correspondant aux divers plans Π de l'espace est l'ensemble des normales aux paraboloïdes Σ et aussi l'ensemble des droites dont chacune est perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à un paraboloïde Σ et est par suite perpendiculaire à sa droite conjuguée par rapport à l'un quelconque des paraboloïdes Σ. Ce complexe contient les axes des sections planes des paraboloïdes Σ et les perpendiculaires aux plans des coniques des paraboloïdes Σ menées respectivement par les centres de ces coniques.*

5° *Le cône du complexe qui a pour sommet un point A est un cône du second degré qui contient les parallèles aux directions principales des paraboloïdes Σ menées par A. La courbe du complexe située dans un plan Π est une parabole tangente aux droites d'intersection du plan Π avec les plans principaux des paraboloïdes.*

6° *Le lieu des droites conjuguées d'une droite L par rapport aux paraboloïdes Σ est un paraboloïde U, qui dégénère en une parabole lorsque la droite L fait partie du complexe.*

13. Théorème. — *Étant données deux quadriques Σ et Σ', s'il existe une quadrique A circonscrite à Σ et homofocale à Σ', il existe une quadrique A' circonscrite à Σ' et homofocale à Σ* (1).

En effet, soit le pôle O par rapport à chacune des quadriques Σ et A du plan de leur conique de contact, et considérons un plan quelconque passant par O et tangent à la quadrique Σ'. Il existe une quadrique A' homofocale à Σ et tangente à ce plan. Chacun des cônes de sommet O qui sont circonscrits aux quadriques A' et Σ' est

(1) Ce théorème est dû à G. Darboux.

tangent à ce même plan et fait partie du faisceau linéaire tangentiel de cônes de sommet O qui contient le cône de sommet O circonscrit aux quadriques Σ et A et le cône isotrope de sommet O. Donc, ces deux cônes coïncident, et par suite tout plan Π passant par O et tangent à Σ′ est aussi tangent à A′. Soit α le pôle unique d'un tel plan Π par rapport aux quadriques Σ et A. Le lieu des pôles d'un plan par rapport à des quadriques homofocales étant une droite perpendiculaire au plan, le point de contact du plan Π avec l'une ou l'autre des quadriques Σ′ et A′ est le pied de la perpendiculaire abaissée de α sur le plan Π. Les deux quadriques Σ′ et A′ sont donc circonscrites l'une à l'autre le long d'une conique; le plan de cette conique a pour pôle unique par rapport à ces deux quadriques le point O. Le théorème est établi.

En particulier, *si deux coniques Γ et Γ′ sont telles qu'il existe une quadrique passant par Γ et admettant Γ′ comme conique focale, il existe aussi une quadrique passant par Γ′ et admettant Γ comme conique focale.*

CHAPITRE XII

RÉSEAUX LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE QUADRIQUES

1. Soient

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, t) = 0, \qquad f_3(x, y, z, t) = 0$$

les équations homogènes de trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 qui n'appartiennent pas à un même faisceau linéaire ponctuel. On voit immédiatement que les quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Σ_1 et une quadrique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Σ_2 et Σ_3 ont pour équation générale

$$\lambda_1 f_1(x, y, z, t) + \lambda_2 f_2(x, y, z, t) + \lambda_3 f_3(x, y, z, t) = 0,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant trois constantes arbitraires non simultanément nulles. La forme même de cette équation montre que les quadriques précédentes coïncident avec les quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Σ_2 et une quadrique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Σ_3 et Σ_1 et coïncident aussi avec les quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Σ_3 et une quadrique quelconque du faisceau linéaire ponctuel qui contient Σ_1 et Σ_2. On désigne l'ensemble de ces quadriques Σ sous le nom de *réseau linéaire ponctuel.* Cet ensemble contient les quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 qui sont dites *quadriques de base.* On voit facilement que le réseau linéaire ponctuel considéré ne change pas si l'on remplace les trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 par trois autres quadriques du réseau prises comme nouvelles quadriques de base, ces trois nouvelles quadriques n'appartenant pas à un même faisceau linéaire ponctuel.

Corrélativement, soient trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 n'appartenant pas à un même faisceau linéaire tangentiel. L'ensemble des quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire tangentiel contenant Σ_1 et nue quadrique quelconque du faisceau linéaire tangentiel qui

contient Σ_2 et Σ_3 coïncide avec l'ensemble des quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire tangentiel contenant Σ_2 et une quadrique quelconque du faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ_3 et Σ_1 et aussi avec l'ensemble des quadriques qui font partie d'un faisceau linéaire tangentiel contenant Σ_3 et une quadrique quelconque du faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ_1 et Σ_2. On désigne cet ensemble unique de quadriques Σ sous le nom de *réseau linéaire tangentiel*. Il contient les quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 dites *quadriques de base*. Le réseau linéaire tangentiel considéré ne change pas si l'on remplace les trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 par trois autres quadriques du réseau, prises comme nouvelles quadriques de base, ces trois nouvelles quadriques n'appartenant pas à un même faisceau linéaire ponctuel.

En particulier, si les quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont trois cônes de la seconde classe proprement dits ou décomposés en deux droites ayant même sommet S, toutes les quadriques Σ sont des cônes de la seconde classe ayant pour sommet le point S.

2. Théorème. — *Par sept points distincts non situés dans un même plan, tels qu'il n'y en ait ni six sur une même conique ni quatre sur une même droite, il passe une infinité de quadriques Σ qui forment un réseau linéaire ponctuel.*

En effet, soit, en coordonnées homogènes, l'équation indéterminée d'une quadrique

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

$f(x, y, z, t)$ ayant dix coefficients. En exprimant que la quadrique passe par les sept points $A_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$, on obtient pour déterminer ces coefficients sept équations

$$f(x_i, y_i, z_i, t_i) = 0,$$

qui sont linéaires et homogènes. Montrons que le rang du système de ces équations ne peut être inférieur à 7.

Distinguons plusieurs cas :

1° Supposons que parmi les sept points, il n'y en ait pas quatre dans un même plan. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pourrait faire passer une quadrique par les sept points donnés et par trois points α, β, γ choisis dans le plan $A_1A_2A_3$ de façon que les points α, β, γ, A_1, A_2, A_3 ne soient pas situés sur une même conique. Alors, la quadrique se décomposerait en le plan $A_1A_2A_3$ et en un autre plan qui devrait contenir les points A_4, A_5, A_6, A_7, ce qui est impossible.

2° Supposons que parmi les sept points A, il y en ait quatre et quatre seulement, A_1, A_2, A_3, A_4, dans un même plan, mais qu'il n'y en ait pas trois en ligne droite. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pourrait faire passer une quadrique par les sept points A donnés et par trois points α, β, γ choisis de la manière suivante: α et β dans le plan $A_1A_2A_3A_4$ de façon que les six points A_1, A_2, A_3, A_4, α, β ne soient pas situés sur une même conique, γ non situé dans le plan $A_1A_2A_3A_4$ et non situé dans le plan $A_5A_6A_7$. Alors la quadrique se décomposerait en le plan $A_1A_2A_3A_4$ et en un autre plan qui devrait contenir A_5, A_6, A_7 et γ, ce qui est impossible.

3° Supposons que parmi les sept points A, il y en ait trois, A_1, A_2, A_3, en ligne droite, les quatre autres n'étant pas dans un même plan. Soit I le point d'intersection de la droite $A_1A_2A_3$ et du plan $A_4A_5A_6$; choisissons trois points α, β, γ de la manière suivante: α et β dans le plan $A_4A_5A_6$, de façon que les six points I, α, β, A_4, A_5, A_6 ne soient pas situés sur une même conique, γ non situé dans le plan $A_4A_5A_6$ et non situé dans le plan $A_1A_2A_3A_7$. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pourrait faire passer une quadrique par les sept points A et les points α, β, γ; cette quadrique se décomposerait nécessairement en le plan $A_4A_5A_6$ et en un plan qui devrait contenir les points A_1, A_2, A_3, A_7 et γ, ce qui est impossible.

4° Supposons que trois des sept points A, les points A_1, A_2, A_3, soient en ligne droite et que les quatre autres soient dans un même plan qui ne contient aucun des trois premiers. Soit I le point d'intersection de la droite $A_1A_2A_3$ et du plan $A_4A_5A_6A_7$; choisissons trois points α, β, γ de la manière suivante: α dans le plan $A_4A_5A_6A_7$, de façon que les six points I, α, A_4, A_5, A_6, A_7 ne soient pas situés sur une même conique, β et γ non situés dans le plan $A_4A_5A_6A_7$, de façon que la droite $\beta\gamma$ ne soit pas dans un même plan avec la droite $A_1A_2A_3$. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pourrait faire passer une quadrique par les sept points A et les points α, β, γ; cette quadrique se décomposerait nécessairement en le plan $A_4A_5A_6A_7$ et en un plan qui devrait contenir les points A_1, A_2, A_3, β et γ, ce qui est impossible.

5° Supposons que cinq des sept points A, les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, soient dans un même plan P, les deux autres, A_6 et A_7, n'étant pas situés dans ce plan. Choisissons trois points α, β, γ comme il suit: α dans le plan P de façon que les six points α, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ne soient pas situés sur une même conique, β et γ en dehors du plan P de façon qu'ils ne soient pas dans un même plan avec A_6 et A_7. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pour-

rait faire passer une quadrique par les sept points A et les points α, β, γ ; cette quadrique se décomposerait nécessairement en le plan P et en un plan qui devrait contenir les points A_6, A_7, β et γ, ce qui est impossible.

6° Supposons enfin que six des sept points A, les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 soient dans un même plan P, le septième point A_7 n'étant pas situé dans ce plan. Choisissons trois points α, β, γ en dehors du plan P et de façon qu'ils ne soient pas dans un même plan avec le plan A_7. Le rang étant supposé inférieur à 7, on pourrait faire passer une quadrique par les points A et les points α, β, γ ; comme les six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ne sont pas situés sur une même conique, cette quadrique se décomposerait nécessairement en le plan P et en un plan qui devrait contenir les points A_7, α, β, γ, ce qui est impossible.

Le rang du système des équations linéaires étant dès lors égal à 7, il est possible d'exprimer sept des coefficients de $f(x, y, z, t)$ en fonction linéaire et homogène des valeurs arbitraires λ_1, λ_2, λ_3 attribuées aux trois autres, de telle sorte que l'équation générale des quadriques passant par les sept points donnés soit de la forme

$$\lambda_1 f_1(x, y, z, t) + \lambda_2 f_2(x, y, z, t) + \lambda_3 f_3(x, y, z, t) = 0,$$

f_1, f_2, f_3 étant trois polynomes à coefficients fixes, premiers membres des équations homogènes de trois quadriques n'appartenant pas à un même faisceau linéaire ponctuel. Le théorème est établi.

Théorème corrélatif. — *Étant donnés sept plans distincts ne passant pas par un même point, tels qu'il n'en existe ni six tangents à un même cône de la seconde classe ni quatre passant par une même droite, il existe une infinité de quadriques tangentes à ces sept plans, et ces quadriques forment un réseau linéaire tangentiel.*

3. Théorème. — *Les quadriques d'un réseau linéaire ponctuel sont rencontrées par un plan fixe* Π *suivant les coniques d'un réseau linéaire ponctuel.*

En effet, soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les coniques d'intersection du plan Π avec les trois quadriques de base Σ_1, Σ_2, Σ_3 du réseau. Une quadrique Σ du réseau fait partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Σ_1 et une quadrique du faisceau linéaire ponctuel qui contient les quadriques Σ_2 et Σ_3. La conique Γ d'intersection de la quadrique Σ et du plan Π fait par suite partie d'un faisceau linéaire ponctuel contenant Γ_1 et une conique du faisceau linéaire

ponctuel qui contient Γ_2 et Γ_3. On voit donc que les coniques Γ forment un réseau linéaire ponctuel.

Théorème corrélatif. — *Les cônes ayant pour sommet un point donné et qui sont circonscrits aux quadriques d'un réseau linéaire tangentiel forment un réseau linéaire tangentiel.*

4. Théorème. — *Les plans polaires d'un point donné par rapport aux quadriques d'un réseau linéaire ponctuel passent par un même point.*

En effet, considérons les plans polaires du point donné P par rapport aux quadriques de base Σ_1, Σ_2, Σ_3 ; ils ont un point commun P′. Soit un point A de la courbe d'intersection des quadriques Σ_1 et Σ_2 non situé sur la quadrique Σ_3. Le plan PP′A rencontre les quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 suivant trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui n'appartiennent pas à un même faisceau linéaire ponctuel. Elles peuvent être prises comme coniques de base du réseau linéaire ponctuel formé par les coniques Γ d'intersection du plan Π avec les quadriques Σ du réseau donné. Les polaires de P par rapport aux coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 concourent au point P′ ; d'après un résultat antérieurement établi (VII, § 8), la polaire de P par rapport à l'une quelconque des coniques Γ passe par P′, et par suite le plan polaire de P par rapport à l'une quelconque des quadriques Σ passe par P′.

Théorème corrélatif. — *Les pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques d'un réseau linéaire tangentiel sont tous dans un même plan.*

En particulier, *le lieu des centres des quadriques d'un réseau linéaire tangentiel est un plan.*

CHAPITRE XIII

TÉTRAÈDRES CONJUGUÉS ET INSCRITS OU CIRCONSCRITS A DEUX QUADRIQUES

1. Théorème de Hesse. — *Toute quadrique* Q *qui passe par sept des sommets* A, B, C, D, A′, B′, C′ *de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique* Σ *passe par le huitième sommet* D′.

En effet, soient q et σ les coniques d'intersection du plan BCD respectivement avec les quadriques Q et Σ. Puisqu'il existe un triangle BCD inscrit à q et conjugué par rapport à σ, il existe une infinité de tels triangles, et, en particulier, il en existe un, $\omega\alpha\beta$, dont le sommet ω est situé sur la droite d'intersection des plans BCD et B′C′D′. Soient q' et σ' les coniques d'intersection du plan $A\alpha\beta$ avec les quadriques Q et Σ. Puisqu'il existe un triangle $A\alpha\beta$ inscrit à q' et conjugué par rapport à σ', il en existe un autre dont un sommet est en A′, qui est un point du plan $A\alpha\beta$; les deux autres sommets α' et β' de ce triangle sont situés dans le plan B′C′D′. Si q'' et σ'' sont les coniques d'intersection du plan B′C′D′ avec les quadriques Q et Σ, il existe donc un triangle $\omega\alpha'\beta'$ inscrit à q'' et conjugué par rapport à σ''. Par suite, le triangle B′C′D′, qui est conjugué par rapport à σ'' et dont les sommets B′ et C′ sont situés sur q'', a aussi son troisième sommet D′ sur cette dernière conique ; autrement dit, la quadrique Q passe par D′.

Ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Étant données deux quadriques Q *et* Σ, *s'il existe un tétraèdre inscrit à* Q *et conjugué par rapport à* Σ, *tout point de* Q *est un sommet d'une infinité de tétraèdres inscrits à* Q *et conjugués par rapport à* Σ.

En effet, soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre considéré inscrit à Q et conjugué par rapport à Σ. Considérons un point A′ quelconque de Q et son plan polaire par rapport à Σ, rencontrant Q suivant une conique q et Σ suivant une conique σ. Soient B′ un point de q, C′ et D′ les points d'intersection de q avec la

polaire de B′ par rapport à σ. Les points A′, B′, C′ sont trois sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à Σ. Toute quadrique passant par A, B, C, D, A′, B′, C′ passe nécessairement par le pôle du plan A′B′C′ par rapport à Σ. Or, ce point est situé sur C′D′; c'est donc D′. Donc, le tétraèdre A′B′C′D′ est inscrit à Q et conjugué par rapport à Σ.

Une quadrique Q circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à Σ est dite *harmoniquement circonscrite à* Σ.

Théorème corrélatif. — *Les quadriques Q qui sont tangentes aux plans de sept des faces de deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique* Σ *sont toutes tangentes au plan de la huitième.*

On a aussi l'énoncé suivant:

Si une quadrique Q est inscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique Σ, *tout plan tangent à Q est le plan d'une face d'une infinité de tétraèdres circonscrits à Q et conjugués par rapport à* Σ.

On dit alors que la quadrique Q est *harmoniquement inscrite à la quadrique* Σ.

2. **Théorème.** — *Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel, il en existe une, et en général une seule, qui est harmoniquement circonscrite à une quadrique donnée* Σ. *S'il en existe plus d'une, toute quadrique du faisceau est harmoniquement circonscrite à* Σ.

Soit, en effet, un point A quelconque de la biquadratique commune aux quadriques Q du faisceau donné. Le plan polaire de A par rapport à Σ rencontre les quadriques Q suivant les coniques q d'un faisceau linéaire ponctuel, et la quadrique Σ suivant une conique σ. Comme nous l'avons établi (II, § 8), parmi les coniques q, il en existe une, et en général une seule, qui est harmoniquement circonscrite à σ. La quadrique Q correspondante est harmoniquement circonscrite à Σ. S'il existe plus d'une conique q harmoniquement circonscrite à σ, toute conique q est harmoniquement circonscrite à σ, et par suite toute quadrique Q est harmoniquement circonscrite à Σ.

Théorème corrélatif. — *Parmi les quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel, il en existe une, et en général une seule, qui est harmoniquement inscrite à une quadrique donnée* Σ. *S'il en existe plus d'une, toute quadrique du faisceau est harmoniquement inscrite à* Σ.

3. Théorème. — *Si une quadrique Σ' est harmoniquement circonscrite à une quadrique Σ, la quadrique Σ est harmoniquement inscrite à Σ'.*

En effet, soit ABCD un tétraèdre inscrit à Σ' et conjugué par rapport à Σ. Π étant un plan tangent à Σ, les quadriques Q tangentes à ce plan et admettant le tétraèdre ABCD comme tétraèdre conjugué, parmi lesquelles se trouve Σ, sont tangentes à sept plans Π' autres que Π, définis de la façon suivante :

On considère le plan Π' conjugué harmonique de Π par rapport au plan d'une face du tétraèdre ABCD et au plan qui passe par le sommet opposé et par la droite d'intersection de Π et du plan de cette face ; on obtient de la sorte quatre plans Π' tangents aux quadriques Q. On répète ensuite les mêmes constructions à partir de l'un quelconque de ces plans Π' remplaçant le plan Π ; quel que soit ce plan Π', on obtient quatre mêmes nouveaux plans tangents aux quadriques Q, parmi lesquels se trouve le plan Π.

Réciproquement, il est immédiat que toute quadrique Q tangente au plan Π et aux sept plans Π' précédents admet le tétraèdre ABCD comme tétraèdre conjugué.

On voit ainsi que les quadriques Q forment un réseau linéaire tangentiel dont fait partie la quadrique Σ. Comme on le reconnaît immédiatement, les huit plans auxquels sont tangentes les quadriques Q se groupent de six manières différentes en deux systèmes de quatre plans, concourant respectivement en deux points tels que α et α' ; les six couples de points α et α' sont situés sur les six arêtes du tétraèdre ABCD et sont respectivement harmoniques par rapport aux couples des extrémités des arêtes qui les portent ; ces six couples de points sont des quadriques singulières du réseau linéaire tangentiel.

Cela posé, soit O le pôle du plan Π par rapport à la quadrique Σ'. Il s'agit de montrer que le cône de sommet O circonscrit à Σ est harmoniquement inscrit au cône de sommet O circonscrit à Σ'. Or, les cônes S de sommet O qui sont circonscrits aux quadriques Q forment un réseau linéaire tangentiel qui contient, en particulier, les six cônes décomposés en les couples de droites telles que $O\alpha$ et $O\alpha'$. Mais, le tétraèdre ABCD étant inscrit à la quadrique Σ', deux points tels que α et α' sont conjugués par rapport à Σ', deux droites telles que $O\alpha$ et $O\alpha'$ sont conjuguées par rapport au cône de sommet O circonscrit à Σ'. Ainsi, le cône de sommet O circonscrit à Σ' est harmoniquement circonscrit à six cônes S ; c'est plus qu'il n'en faut pour qu'il soit harmoniquement circonscrit à tout cône S et, en particulier, au cône de sommet O circonscrit à Σ, lequel, inver-

sement, lui est harmoniquement inscrit, ce qu'il fallait établir.

Théorème corrélatif. — *Si une quadrique Σ est harmoniquement inscrite à une quadrique Σ', la quadrique Σ' est harmoniquement circonscrite à Σ.*

4. Théorème. — *Les quadriques qui passent par cinq points donnés sont rencontrées par un plan fixe quelconque suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une conique fixe.*

Soient en effet A, B, C, D, E les cinq points donnés et Π le plan donné. Je dis qu'il existe une quadrique Σ admettant le tétraèdre ABCD comme tétraèdre conjugué et telle que le plan polaire de E par rapport à cette quadrique soit le plan Π. Pour le montrer, cherchons quelle doit être la conique Γ d'intersection d'une telle quadrique avec le plan BCD. D'abord, cette conique admet le triangle BCD comme triangle conjugué ; en outre, la droite L d'intersection des plans Π et BCD, étant conjuguée de la droite AE par rapport à Q, a pour pôle par rapport à Γ le point I d'intersection de AE et du plan BCD. Soient β et β', γ et γ', δ et δ' les points de rencontre avec L respectivement des droites IB et CD, IC et DB, ID et BC. Les droites IB, IC, ID étant respectivement conjuguées par rapport à Γ des droites CD, DB, BC, les points P et Q d'intersection de L et de la conique Γ sont les points doubles de l'involution qui contient les couples de points (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ'), d'où il résulte que la conique Γ est déterminée d'une manière unique (II, § 2). La quadrique Σ cherchée est nécessairement inscrite suivant la conique Γ au cône qui a pour directrice cette conique et pour sommet le point A. Pour achever de déterminer la quadrique Σ, il suffit d'en déterminer un point non situé dans le plan BCD. Menons pour cela la droite qui passe par E et un point M de la conique Γ ; la quadrique Σ doit passer par le conjugué harmonique M' de M par rapport au point E et au point de rencontre de la droite EM avec le plan Π. D'ailleurs, la quadrique qui passe par Γ, qui est telle que le pôle du plan de Γ par rapport à cette quadrique soit le point A et qui passe par M' est bien la quadrique Σ cherchée.

Cela posé, en vertu du théorème de Hesse, toute quadrique qui passe par les cinq points A, B, C, D, E est harmoniquement circonscrite à Σ et est rencontrée par le plan Π, plan polaire de E par rapport à Σ, suivant une conique harmoniquement circonscrite à la conique Ω d'intersection de la quadrique Σ avec le plan Π.

Remarquons qu'il existe cinq quadriques telles que Σ, chacune d'elles correspondant à une manière de partager les cinq points

donnés en deux groupes, l'un contenant un de ces points, l'autre contenant les quatre autres points. Ces cinq quadriques sont rencontrées par le plan Π suivant la même conique Ω.

Application. — Supposons que le plan Π soit le plan à l'infini et que la conique Ω d'intersection du plan Π avec les cinq quadriques Σ soit le cercle à l'infini. Les quadriques Σ sont alors des sphères, et les cinq points A, B, C, D, E sont tels que quatre quelconques d'entre eux soient les sommets d'un tétraèdre orthocentrique ayant pour orthocentre le cinquième de ces points. Les quadriques qui passent par ces cinq points ont pour coniques à l'infini des coniques harmoniquement circonscrites au cercle à l'infini ; autrement dit, *leurs cônes asymptotiques sont équilatères.*

On voit immédiatement que, *réciproquement, les quadriques dont les cônes asymptotiques sont équilatères qui passent par les sommets d'un tétraèdre orthocentrique passent aussi par l'orthocentre de ce tétraèdre.*

5. Théorème de Faure et théorème de Monge. — 1° Soient deux sphères S_1 et S_2 harmoniquement circonscrites à une quadrique Σ à centre unique à distance finie. D'après un théorème précédent, les sphères S qui passent par l'intersection de ces deux sphères sont toutes harmoniquement circonscrites à Σ. L'une de ces sphères S est formée du plan radical Π des sphères S_1 et S_2 et du plan à l'infini ; ces deux plans sont donc conjugués par rapport à Σ ; autrement dit, le plan radical Π des sphères S_1 et S_2 passe par le centre O de la quadrique Σ. Par suite, le centre O de Σ a même puissance par rapport à deux sphères quelconques harmoniquement circonscrites à Σ. Ainsi,

Les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique Σ à centre unique à distance finie sont orthogonales à une sphère fixe ω concentrique à Σ.

Parmi les sphères qui passent par l'intersection des sphères S_1 et S_2, il en existe deux qui sont des sphères de rayon nul ; ces deux sphères de rayon nul sont orthogonales à la sphère ω ; autrement dit, leurs centres P et P' sont situés sur ω. Ces sphères de rayon nul sont les cônes isotropes qui ont pour sommets P et P' ; ces cônes sont harmoniquement circonscrits aux cônes circonscrits à Σ qui ont pour sommets P et P', lesquels leur sont harmoniquement inscrits. On peut donc, d'une infinité de manières, mener de chacun des points P et P' trois plans tangents rectangulaires à Σ. On est ainsi conduit au théorème suivant, dû à Monge :

Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une quadrique Σ à centre unique à distance finie est une sphère concentrique à Σ.

Cette sphère est dite *sphère orthoptique de* Σ. On a alors l'énoncé suivant, dû à Faure :

Les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique Σ à centre unique à distance finie sont orthogonales à la sphère orthoptique de cette quadrique.

2° Supposons que la quadrique Σ, au lieu d'être une quadrique à centre unique à distance finie, soit un paraboloïde. Le plan radical des sphères S_1 et S_2 est conjugué du plan à l'infini par rapport au paraboloïde. On a le théorème suivant :

Les sphères harmoniquement circonscrites à un paraboloïde ont leurs centres dans un même plan P perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

En répétant le raisonnement précédent, on voit que *ce plan P est le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde.*

Ce plan est dit *plan orthoptique* du paraboloïde.

Soit un tétraèdre orthocentrique ABCD circonscrit à un paraboloïde Σ. Si H est l'orthocentre et si A', B', C', D' sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C, D, on a

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'} = \overline{HD} \cdot \overline{HD'}.$$

La sphère qui a pour centre H et pour rayon $\sqrt{\overline{HA} \cdot \overline{HA'}}$ admet le tétraèdre ABCD comme tétraèdre conjugué. Le paraboloïde est harmoniquement inscrit à cette sphère, laquelle est harmoniquement circonscrite au paraboloïde ; d'après le théorème de Faure, le centre de la sphère est dans le plan orthoptique du paraboloïde. Ainsi,

Le point de concours des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique circonscrit à un paraboloïde est situé dans le plan orthoptique de ce paraboloïde.

Applications. — 1° Considérons un point P commun aux sphères orthoptiques de deux quadriques Σ_1 et Σ_2. Les cônes S qui ont pour sommet le point P et qui sont circonscrits aux quadriques Σ du faisceau linéaire tangentiel qui contient Σ_1 et Σ_2 forment un faisceau linéaire tangentiel. Or, deux de ces cônes sont harmoniquement inscrits au cône isotrope de sommet P ; il en est de même de l'un quelconque des cônes S ; autrement dit, le point P est situé

sur la sphère orthoptique de l'une quelconque des quadriques Σ. Par suite,

Les sphères orthoptiques des quadriques d'un faisceau linéaire tangentiel forment un faisceau linéaire ponctuel.

La ligne des centres de ces sphères est le lieu des centres des quadriques Σ; cette droite est parallèle à l'axe du paraboloïde qui fait partie du faisceau des quadriques Σ. Le plan radical commun aux sphères orthoptiques est le plan orthoptique de ce paraboloïde.

2° Considérons un point P commun aux sphères orthoptiques de trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 n'appartenant pas à un même faisceau linéaire tangentiel. Les cônes S qui ont pour sommet le point P et qui sont circonscrits aux quadriques Σ du réseau linéaire tangentiel qui contient Σ_1, Σ_2 et Σ_3 forment un réseau linéaire tangentiel. Or, trois cônes de ce réseau, n'appartenant pas à un même faisceau linéaire tangentiel, sont harmoniquement inscrits au cône isotrope de sommet P ; il en est de même de l'un quelconque des cônes S, autrement dit, le point P est situé sur la sphère orthoptique de l'une quelconque des quadriques Σ. Par suite,

Les sphères orthoptiques des quadriques d'un réseau linéaire tangentiel ont deux points communs, distincts ou confondus. Elles forment un réseau linéaire ponctuel.

Le plan des centres de ces sphères est le lieu des centres des quadriques Σ.

6. Théorème de Frégier. — *Si un trièdre ayant pour sommet un point fixe O d'une quadrique Σ varie de façon à rester conjugué par rapport à un cône fixe S du second degré de sommet O, le plan qui passe par les points de rencontre variables de ses arêtes avec la quadrique Σ passe par un point fixe.*

Soient en effet deux positions de ce trièdre variable, ayant pour arêtes respectivement OA, OB, OC et OA', OB', OC', les points A, B, C et A', B', C' étant les points de rencontre autres que O de ces droites avec Σ. Soient Γ et Γ' les coniques d'intersection de la quadrique Σ avec les plans ABC et A'B'C' ; ces deux coniques se rencontrent en deux points D et D' situés sur la droite d'intersection des plans ABC et A'B'C'. Les deux cônes qui ont pour sommet le point O et pour directrices les coniques Γ et Γ' passent par les deux droites Ox et Ox' d'intersection de Σ avec son plan tangent en O et aussi par les droites OD et OD'. Or, ces deux cônes sont

harmoniquement circonscrits au cône S; il en est de même de tout cône du faisceau linéaire ponctuel qui contient ces deux cônes; d'après cela, le plan tangent en O à Σ et le plan (OD, OD′) sont conjugués par rapport au cône S; autrement dit, la droite polaire Δ par rapport au cône S du plan tangent en O à Σ rencontre la droite DD′. On voit ainsi que les deux plans ABC et A′B′C′ rencontrent cette droite fixe Δ au même point.

Théorème corrélatif. — *Si un trièdre variable circonscrit à une quadrique fixe Σ est rencontré par un plan tangent fixe Π à cette quadrique suivant un triangle qui reste conjugué par rapport à une conique fixe Γ située dans le plan Π, le sommet de ce trièdre décrit un plan, qui rencontre le plan Π suivant la polaire par rapport à Γ du point de contact de Π avec Σ.*

En particulier, supposons que la conique considérée Γ soit le cercle à l'infini; la quadrique Σ est alors un paraboloïde et le trièdre variable est trirectangle. On voit ainsi que

Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à un paraboloïde est un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

CHAPITRE XIV

CUBIQUES GAUCHES

---

1. Théorème. — *Par six points arbitraires de l'espace, il passe une cubique gauche et une seule.*

Soient en effet $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les six points donnés. La cubique cherchée est nécessairement située sur le cône du second degré qui a pour sommet le point A_1 et qui passe par les cinq droites A_1A_2, $A_1A_3, \ldots, A_1A_6$ et aussi sur le cône du second degré qui a pour sommet le point A_2 et qui passe par les cinq droites A_2A_1, A_2A_3, $A_2A_4, \ldots, A_2A_6$. Or, ces deux cônes ont en commun la droite A_1A_2; le reste de leur intersection est une cubique gauche, qui convient.

2. Théorème. — *Une cubique gauche est, en général, rencontrée par une quadrique quelconque en six points. Si une cubique gauche a plus de six points communs avec une quadrique, elle appartient à cette quadrique.*

Soient en effet deux points O et O′ de la cubique et considérons les cônes du second degré qui ont pour sommets O et O′ et pour directrice commune la cubique. Ces deux cônes et la quadrique donnée Σ ont huit points communs dont deux sont les points d'intersection de la droite OO′ avec la quadrique Σ; les six autres points sont les points d'intersection de la cubique et de la quadrique Σ.

Il y a exception si les quadriques précédentes ont une courbe commune; O et O′ étant arbitraires, cette courbe commune ne peut être que la cubique gauche, qui est alors située sur la quadrique Σ.

Ainsi, deux cas et deux seulement sont possibles : ou bien la cubique a six points communs avec Σ, ou bien elle est située sur Σ. Il en résulte que les quadriques qui passent par sept points d'une cubique gauche la contiennent tout entière; ces quadriques forment un réseau linéaire ponctuel.

3. Théorème. — *Par tout point de l'espace il passe une droite et une seule rencontrant une cubique gauche donnée en deux points, distincts ou confondus.*

En effet, les quadriques qui passent par sept points de la cubique et par le point donné O forment un faisceau linéaire ponctuel. La courbe commune à ces quadriques se compose de la cubique gauche et d'une droite passant par le point O et rencontrant la cubique en deux points. En outre, une telle droite est unique, car s'il existait deux droites passant par O et rencontrant chacune la cubique en deux points, le plan de ces deux droites aurait quatre points communs avec la cubique, ce qui est impossible.

4. Rapport anharmonique de quatre points d'une cubique gauche. — Théorème. — *Le rapport anharmonique des quatre plans qui passent par quatre points fixes d'une cubique gauche et par une droite variable rencontrant la cubique en deux points est constant.*

Soient en effet quatre points A, B, C, D de la cubique, et d'autre part deux droites rencontrant la cubique, l'une aux points M et N, l'autre aux points M′ et N′ ; il s'agit de démontrer que le rapport anharmonique (MNA, MNB, MNC, MND) est égal au rapport anharmonique (M′N′A, M′N′B, M′N′C, M′N′D). Montrons d'abord que les rapports anharmoniques des plans MNA, MNB, MNC, MND et des plans MM′A, MM′B, MM′C, MM′D sont égaux. En effet, considérons le cône S qui a pour sommet M et pour directrice la cubique ; c'est un cône du second degré ; sa section par un plan quelconque H est une conique. Si a, b, c, d, m' et n sont les points d'intersection de ce plan et des droites MA, MB, MC, MD, MM′ et MN, d'après le théorème de Chasles, les deux rapports anharmoniques (na, nb, nc, nd) et ($m'a$, $m'b$, $m'c$, $m'd$) sont égaux. Or, ces deux rapports anharmoniques sont respectivement égaux aux rapports anharmoniques (MNA, MNB, MNC, MND) et (MM′A, MM′B, MM′C, MM′D), qui sont ainsi eux-mêmes égaux.

De la même manière, en considérant le cône qui a pour sommet M′ et pour directrice la cubique, on voit que les rapports anharmoniques (MM′A, MM′B, MM′C, MM′D) et (M′N′A, M′N′B, M′N′C, M′N′D) sont égaux. En définitive, le rapport anharmonique (MNA, . . . , MND) est égal au rapport anharmonique (M′N′A; . . . , M′N′D).

La valeur constante du rapport anharmonique des quatre plans